Lucrările Seminarul de
CREATIVITATE MATEMATICĂ
Vol.4(1994-1995),113-114

O INTEGRALĂ IMPROPRIE

Gabriella KOVÁCS

Prezenta notă se incadrează în şirul lucrărilor care ar mai putea fi intitulate "Abordarea creativă a unei probleme de matematică".

În [1], Malcolm P.Sheridan (State University of New York at Albany) semnează următorul enunţ:

Să se calculeze:

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{(x^2+1)(x^a+1)}dx,\quad a\in\mathbb{R} \quad . \tag{1}$$

Schiţăm pe scurt modul de rezolvare, după cum apare în [2].

Considerând

$$I(t)=\int_t^{\frac{1}{t}}\frac{1}{(x^2+1)(x^a+1)}dx \quad pentru \quad t>0 ,$$

integrala (1) este egală cu $\lim\limits_{t\searrow 0}I(t)$.

În integrala I(t) limitele de integrare sugerează substituţia $\frac{1}{x}=x$. Efectuând substituţia obţinem

$$I(t)=\int_t^{\frac{1}{t}}\frac{x^a}{(x^2+1)(x^a+1)}dx \; .$$

Adunând cele două integrale I(t) găsim

$$I(t)=\frac{1}{2}\int_t^{\frac{1}{t}}\frac{1}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\left(arctg\,\frac{1}{t}-arc\,tg\,t\right) \quad şi \quad \lim_{t\searrow 0}I(t)=\frac{\pi}{4} \; .$$

Deci integrala (1) este egală cu $\frac{\pi}{4}$.

Constatăm cu surprindere, că valoarea integralei (1) nu depinde de a. Acest fapt ne îndeamnă să ne ocupăm în continuare de integrala (1). Propunem următoarea generalizare a ei:

$$(2) \qquad I=\int_0^{+\infty}\frac{1}{(x^{\frac{2}{p}}+1)^{p}(x^{a}+1)}dx=\frac{p}{4}\beta\left(\frac{p}{2},\frac{p}{2}\right) \quad a\in\mathbb{R},\ p>0\ .$$

Pentru a demonstra relaţia (2), repetăm raţionamentul prezentat înainte.Cu substituţia $\frac{1}{x}\to x$ integrala I devine

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{x^{a}}{(x^{\frac{2}{p}}+1)^{p}(x^{a}+1)}dx\ .$$

Adunând cele două integrale I rezultă că

$$I=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1}{(x^{\frac{2}{p}}+1)^{p}}dx\ .$$

Substituţia $\frac{x^{\frac{2}{p}}}{x^{\frac{2}{p}}+1}\to x$ duce la $I=\frac{p}{4}\int_0^1 x^{\frac{p}{2}-1}(1-x)^{\frac{p}{2}-1}=\frac{p}{4}\beta\left(\frac{p}{2},\frac{p}{2}\right)$.

În final menţionăm, că integrala (1), urmată de o altă generalizare a ei, se găseşte în cartea [3] a lui G.Pólya, apărută în 1954;iar cazul particular a=2n ($n\in\mathbb{N}^*$) se identifică cu problema 20138* [4] de Liliana Niculescu (soluţie bazată pe substituţia trigonometrică x=tgt în [5]).Astfel,integrala (1) ilustrează soarta problemelor de matematică cu adevărat interesante, care odată descoperite, pot fi redescoperite de mai multe ori.

BIBLIOGRAFIE

1.American Mathematical Monthly 89 (1982),p.498.
2.American Mathematical Monthly 92 (1985),p.738.
3.Pólya,G.:Matematica şi raţionamentele plauzibile,Vol.I(Inducţia şi analiza în matematică).Ed.Ştiinţifică,Bucureşti 1962, p.237, p.318.
4.Gazeta Matematică LXXXIX(1984),p.239.
5.Gazeta Matematică XC(1985),p.158.

AN IMPROPER INTEGRAL

ABSTRACT. In this note we give generalization (2) for the integral (1).

Universitatea din Baia Mare
Str. Victoriei nr.76,4800 Baia Mare
ROMÂNIA