Lucrările Seminarului de
CREATIVITATE MATEMATICĂ
Vol.4(1994-1995),115-118

O PROBLEMĂ DE EXTREM

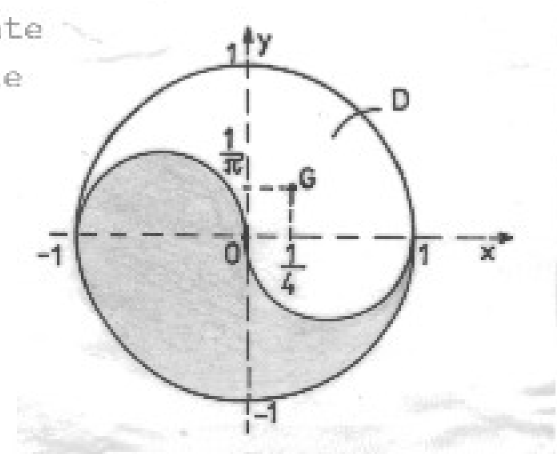
Gabriella KOVÁCS

În [1], Krámli J. enunţă următoarea problemă deschisă:

Găsiţi centrul de greutate şi coarda de lungime maximă a porţiunii albe a unui medalion YIN-YANG. Medalionul se presupune din placă plană omogenă (cu densitatea de masă constantă).

Problema poate constitui tema unui seminar de analiză matematică în anul I de studiu, atât la secţiile de ingineri, cât şi la secţia matematică-fizică.

1.Coordonatele centrului de greutate le aflăm cu uşurinţă utilizând formulele clasice cu integrală dublă.



Presupunem medalionul centrat în origine, de diametru 2,cum se vede în imagine.

Fie $\rho(x,y)=k, \forall(x,y)\in D$ $(k>0)$ funcţia densitate a medalionului.

Masa porţiunii albe este:

$$M=\iint_D \rho(x,y)\,dx\,dy=\iint_D k\,dx\,dy=k\iint_D 1\,dx\,dy=k\cdot aria(D)=\frac{k\pi}{2}.$$

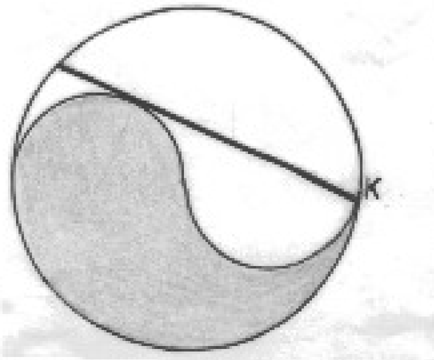
Coordonatele centrului de greutate al porţiunii albe sunt:

$$x_G=\frac{1}{M}\iint_D x\rho(x,y)\,dx\,dy=\frac{1}{M}\iint_D x\cdot k\,dx\,dy=\frac{k}{M}\iint_D x\,dx\,dy=\frac{2}{\pi}\iint_D x\,dx\,dy=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{8}=\frac{1}{4},$$

$$y_G=\frac{1}{M}\iint_D y\rho(x,y)\,dx\,dy=\frac{1}{M}\iint_D y\cdot k\,dx\,dy=\frac{k}{M}\iint_D y\,dx\,dy=\frac{2}{\pi}\iint_D y\,dx\,dy=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{\pi}.$$

Lăsăm pe seama cititorului efectuarea calculelor.

2.Vom vedea, că cea mai lungă coardă a zonei albe este coarda din figura următoare, şi lungimea ei, luând ca unitate raza cercului

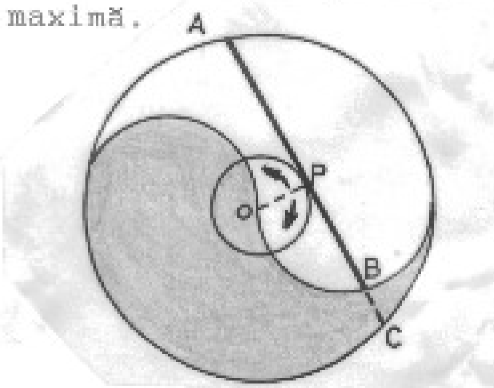


mare, este $\frac{4}{3}\sqrt{2}=1,8856181\ldots$.

În primul rând, din compactitatea zonei albe şi din continuitatea funcţiei distanţă, pe baza teoremei lui Weierstrass deducem, că în zona albă există cel puţin o coardă de lungime maximă.

Evident, o coardă a porţiunii albe cu ambele extremităţi pe semicercurile interioare medalionului - a se privi figura de mai sus - nu este de lungime maximă.

În continuare considerăm o coardă a porţiunii albe cu un capăt (A) pe semicercul superior mare, şi cu celălat capăt (B) pe unul din semicercurile interioare medalionului, astfel încât capetele coardei să nu fie la intersecţia cercului mare cu un cerc mic(să nu fie în K sau în punctul diametral opus lui K pe cercul mare).Vom arăta, că această coardă nu este de lungime maximă.



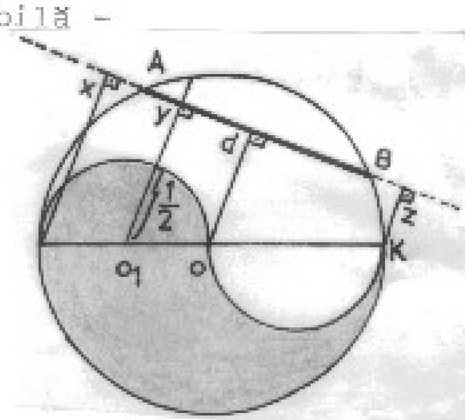
Notăm cu C al doilea punct în care coarda AB întâlneşte cercul mare. Notăm cu P proiecţia lui O pe AC.

Rotim-într-o mică măsură-segmentul OP în jurul lui O; la fiecare poziţie a lui OP ne imaginăm coarda AC a cercului mare perpendiculară în P pe OP. O astfel de coardă are aceeaşi lungime ca şi coarda AC iniţială (ele aflându-se la aceeaşi distanţă faţă de O), însă partea din zona neagră a sa este mai scurtă sau mai lungă decât partea din zona neagră a coardei AC iniţiale,şi implicit,partea din zona albă a sa este mai lungă respectiv mai scurtă, decât segmentul AB al coardei AC iniţiale - după cum rotirea lui OP s-a produs în direcţia de deplasare a acelor de ceasornic,ori în direcţie opusă (nu neapărat în această ordine).

Efectuând rotirea lui OP în direcţie convenabilă, partea din zona albă a coardei AC devine mai lungă, decât segmentul AB al coardei AC iniţiale.

Deci orice coardă de lungime maximă a zonei albe are ambele extremităţi pe semicercul superior mare - înţelegând aici semicercul închis. Astfel coardele de lungime maximă ale zonei albe sunt totodată coarde ale cercului mare.

Cu ajutorul figurii următoare, dintre toate coardele semicercului superior mare vom alege coardele care nu taie semicercul interior mic din stânga - adică au distanţa faţă de O_1: $y \geq \frac{1}{2}$, şi au cea mai mare lungime posibilă - adică distanţa lor d faţă de O este cât se poate de mică:



$$\begin{cases} d \to \min \\ y \geq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{2}d \to \min \\ y \geq \frac{1}{2} \end{cases} \qquad (x, y, z, d \geq 0)$$

Avem

$$\left.\begin{array}{l} d \text{ linie mijlocie de trapez} \Rightarrow d = \frac{x+z}{2} \\ y \text{ linie mijlocie de trapez} \to y = \frac{x+d}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow d - y = \frac{z-d}{2} \Rightarrow \frac{3}{2}d = y + \frac{z}{2} .$$

Din $y \geq \frac{1}{2}, z \geq 0, \frac{3}{2}d = y + \frac{z}{2}$ rezultă că $\frac{3}{2}d \geq \frac{1}{2}$,şi

că $\frac{3}{2}d = \frac{1}{2} \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}, z = 0$. În acest caz $d = \frac{1}{3}$,şi cu teorema lui

Pitagora $AB = 2\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{4}{3}\sqrt{2}$.

$$z = 0 \Leftrightarrow$$

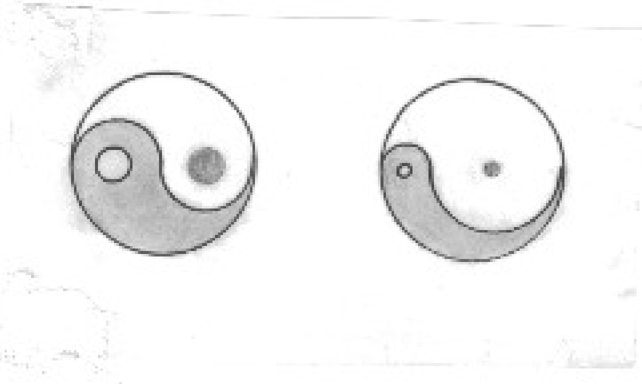
Coarda AB a semicercului superior mare are un capăt în K (1);

$$y = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

Coarda AB este tangentă cercului mic interior din stânga (2).

(1) şi (2) determină în mod unic o coardă: coarda din prima figură a prezentului punct 2.

În final propunem cititorului varianta medalionului YIN-YANG care mai conţine un disc mic alb în zona neagră, şi simetric, un disc negru în zona albă - eventual cu proporţiile modificate.



BIBLIOGRAFIE

1. OCTOGON Vol.2, nr.1 [aprilie 1994], p.34.

AN EXTREMUM PROBLEM

ABSTRACT. We answer Krámli's open question ([1]) related to the famous YIN-YANG modal: we locate the centre of gravity of the white area in the usual assumption of homogenous sheet, we find the longest chord wholly lain in the white area, and state its length.

Universitatea din Baia Mare
Str. Victoriei nr.76, 4800 Baia Mare
ROMÂNIA