Lucrările Seminarului de
CREATIVITATE MATEMATICĂ
Vol.4 (1994-1995),119-126

GENERALIZĂRI ALE UNEI FORMULE DE MEDIE

Maria S.POP și Gabriella KOVÁCS

În [1] apare următoarea problemă propusă de Kolumbán J.:

" *Fie $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$ și $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ astfel încât:*

1. f este continuă în a și b;

2. f este derivabilă pe $]a,b[$;

3. $f(a)=f(b)$.

Demonstrați, că există $c\in]a,b[$ pentru care

$$f(c)\cdot f'(c)+c=\frac{a+b}{2} \qquad (1)$$

Dați o interpretare geometrică și generalizați acest rezultat."

Observație. Concluzia problemei rămâne adevărată și dacă în enunțul problemei condiția 3 se înlocuiește prin $f(a)=-f(b)$.

Soluția I. Considerăm funcția

$$F:[a,b]\to\mathbb{R},\quad F(x)=f^2(x)+\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2.$$

Ea este continuă pe $[a,b]$ și derivabilă pe $]a,b[$.

Întrucât $F(a)=f^2(a)+\left(\frac{a-b}{2}\right)^2=f^2(b)+\left(\frac{b-a}{2}\right)^2=F(b)$, suntem în condițiile teoremei lui Rolle și există $c\in]a,b[$ astfel încât $F'(c)=0$, adică $2f(c)\cdot f'(c)+2c-(a+b)=0$, de unde avem relația (1).

Soluţia II. Aplicăm teorema de medie a lui Lagrange funcţiei
$$G:[a,b]\to\mathbb{R},\ G(x)=x^2+f^2(x).$$

Interpretare geometrică. Deoarece ecuaţia normalei la graficul funcţiei f în punctul $C(c,f(c))$ este
$$x+f'(c)\cdot y-f(c)\cdot f'(c)-c=0,$$
relaţia (1) exprimă faptul că această normală trece prin mijlocul $D\left(\frac{a+b}{2},0\right)$ al intervalului $[a,b]$.

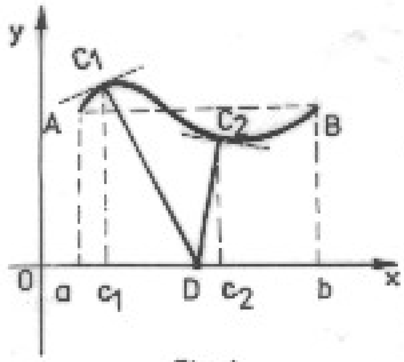


Fig.1

Prin urmare, în condiţiile problemei citate, din mijlocul intervalului $[a,b]$ se poate duce cel puţin o normală la curba $y=f(x), x\in]a,b[$ (Fig.1).

Analizând Soluţia I din punct de vedere geometric constatăm, că $F(x)$ exprimă pătratul distanţei de la punctul $D\left(\frac{a+b}{2},0\right)$ la punctul $M(x,f(x))$ al graficului funcţiei f ($F(x)=|DM|^2$), şi astfel condiţia $F(a)=F(b)$ - crucială în Soluţia I - geometric echivalează cu egalitatea $|DA|=|DB|$, unde $A(a,f(a)), B(b,f(b))$. În cele ce urmează extindem problema de pornire înlocuind punctul $D\left(\frac{a+b}{2},0\right)$ cu orice alt punct situat la distanţă egală de punctele $A(a,f(a))$ şi $B(b,f(b))$.

Propoziţia 1.1. *Dacă funcţia $f:[a,b]\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ($a<b$) este continuă pe $[a,b]$, derivabilă pe $]a,b[$ şi $f(a)=f(b)$, atunci oricare ar fi $d\in\mathbb{R}$, există $c_d\in]a,b[$ astfel încât*

$$(f(c_d)-d)\cdot f'(c_d)+c_d=\frac{a+b}{2} \qquad (2)$$

Observaţie. Pentru $d=0$ regăsim problema din [1].

Propoziţia 1.2. *Dacă $f:[a,b]\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ($a<b$) este continuă pe $[a,b]$ şi derivabilă pe $]a,b[$, atunci oricare ar fi $d\in\mathbb{R}$, există $c_d\in]a,b[$, astfel încât:*

$$(f(c_d)-d)\cdot f'(c_d)+c_d=\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}-d\right)\cdot\frac{f(b)-f(a)}{b-a}+\frac{a+b}{2} \qquad (3)$$

Observaţie. Dacă $f(a)=f(b)$, relaţia (3) coincide cu relaţia (2). Dacă $f(a)=\pm f(b)$, relaţia (3) pentru $d=0$ coincide cu relaţia (1).

Demonstraţia I. Fie $F:[a,b]\to\mathbb{R}$, $F(x)=(x-x_0)^2+(f(x)-d)^2$, unde x_0 s-a ales astfel încât $F(a)=F(b)$, adică

$$x_0=\frac{a+b}{2}+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}-d\right)$$

. Funcţia F este continuă pe $[a,b]$, şi este derivabilă pe $]a,b[$. Deoarece suntem în condiţiile teoremei lui Rolle, există $c_d\in]a,b[$ astfel încât $F'(c_d)=0$. Ultima egalitate ne conduce la relaţia (3).

Demonstraţia II. Aplicăm teorema de medie a lui Lagrange funcţiei $G:[a,b]\to\mathbb{R}$, $G(x)=(x-x_0)^2+(f(x)-d)^2$ cu $x_0\in\mathbb{R}$ ales arbitrar, de exemplu $x_0=0$.

Observaţie. Pentru simplificarea scrierii, în continuare, în loc de c_d vom scrie doar c.

Interpretare geometrică. Relaţia (3) exprimă faptul că normala la graficul funcţiei f în punctul $C(c,f(c))$, mediatoarea coardei AB şi dreapta $y=d$ sunt concurente. În consecinţă, Propoziţia 1.2 (1.1) afirmă că dacă funcţia f verifică ipotezele din enunţ, atunci din orice punct al mediatoarei coardei AB se poate duce cel puţin o normală la curba $]\overset{\frown}{AB}[$: $y=f(x), x\in]a,b[$ (Fig.2).

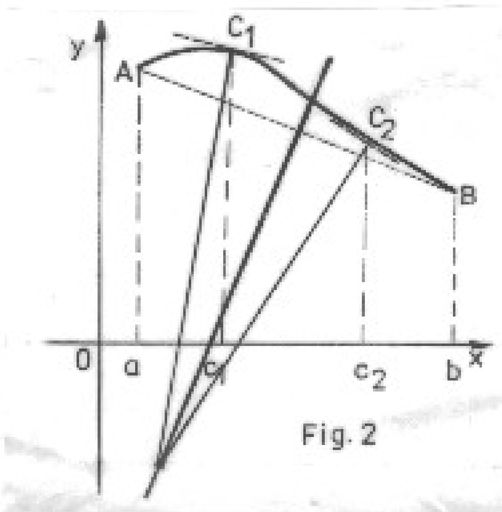


Fig. 2

Cazuri particulare.

1) Pentru $d=0$ relaţia (3) devine

$$f(c)\cdot f'(c)+c=\frac{f^2(b)-f^2(a)}{2(b-a)}+\frac{a+b}{2} \quad (4)$$

şi Propoziţia 1.2 afirmă că există $c\in]a,b[$ astfel încât normala la grafic în punctul $(c,f(c))$, mediatoarea coardei AB şi axa Ox sunt concurente.

2) Pentru

$d=\frac{f(a)+f(b)}{2}$ *relatia* (3) *devine*

$$\left(f(c)-\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)\cdot f'(c)+c=\frac{a+b}{2} \quad (5)$$

şi Propoziţia 1.2 afirmă că din mijlocul coardei AB se poate duce cel puţin o normală la curba $]\widehat{AB}[$: $y=f(x)$, $x\in]a,b[$.

În particular, pentru $f(a)=-f(b)$, relaţiile (4) şi (5) coincid cu relaţia (1).

3)Dacă $f(a)\neq f(b)$, pentru $d=\frac{f(a)+f(b)}{2}+\frac{b^2-a^2}{2(f(b)-f(a))}$ relaţia (3) devine

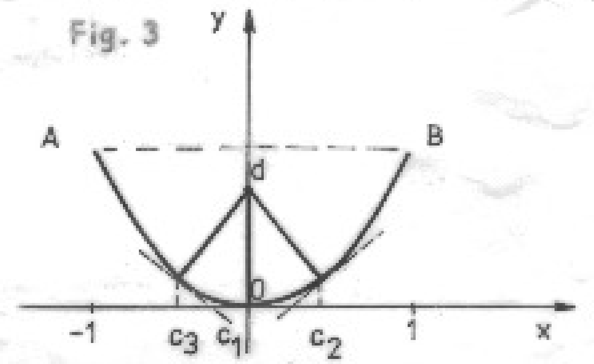
$$\left(f(c)-\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{b^2-a^2}{2(f(b)-f(a))}\right)\cdot f'(c)+c=0$$

şi Propoziţia 1.2 afirmă că există $c\in]a,b[$ astfel încât normala curbei $]\widehat{AB}[$: $y=f(x)$, $x\in]a,b[$ în punctul $(c,f(c))$, mediatoarea coardei AB şi axa Oy sunt concurente.

Exemplu. Dacă $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$, Propoziţia 1.2 spune că pentru orice $d\in\mathbb{R}$ există $c\in]-1,1[$ astfel încât $(c^2-d)\cdot 2c+c=0$.

Într-adevăr,ecuaţia în c, pentru $d\in(-\infty,\frac{1}{2}]\cup[\frac{3}{2},\infty)$ are o singură soluţie în intervalul $]-1,1[$: $c=0$, iar pentru $d\in\left]\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right[$ are trei soluţii în $]-1,1[$: $c_1=0, c_{2,3}=\pm\sqrt{d-\frac{1}{2}}$. Geometric, din punctele $(0,y)$ ale axei Oy cu ordonata $y\in]\frac{1}{2},\frac{3}{2}[$ se pot duce trei normale la arcul de parabolă $y=x^2$, $x\in]-1,1[$; iar din celelalte puncte ale axei Oy se poate duce o singură normală (axa Oy) (Fig.3)

Fig. 3



În cele ce urmează vom generaliza formulele de medie anterioare pentru funcţii $f:D\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$. Ideea generalizării ne este sugerată de Soluţia II dată problemei introductive, respectiv Demonstraţia II dată Propoziţiilor 1.1, 1.2, şi constă în aplicarea teoremei lui Lagrange,varianta pentru funcţii reale de n variabile reale,funcţiei $F(x)=\langle x-x_0,x-x_0\rangle+\langle f(x)-d,f(x)-d\rangle$

unde $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $d \in \mathbb{R}^m$, iar $<\ ,\ >$ notează produsul scalar canonic în $\mathbb{R}^n$ respectiv în $\mathbb{R}^m$, fără pericol de confuzie.

Privim elementele din $\mathbb{R}^p$ ($p \geq 2$) ca vectori linie.

Pentru $a,b \in \mathbb{R}^p$ ($p \geq 1$), $a \neq b$, notăm

$]a,b[=\{x \in \mathbb{R}^p \mid x=a+t(b-a), t \in]0,1[\}$ segmentul deschis

$[a,b]=\{x \in \mathbb{R}^p \mid x=a+t(b-a), t \in [0,1]\}$ segmentul închis de capete a,b.

Notăm $J_f = \begin{bmatrix} (f_1)'_{x_1} \ldots (f_1)'_{x_n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ (f_m)'_{x_1} \ldots (f_m)'_{x_n} \end{bmatrix}$ matricea Jacobi pentru $f:D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$,

$f=(f_1,\ldots,f_m)$,și $\nabla f=(f'_{x_1},\ldots,f'_{x_n})$ vectorul gradient pentru $f:D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Propoziția 2. *Fie $[a,b] \subset D \subseteq \mathbb{R}^n$, D mulțime deschisă.*

Dacă funcția $f:D \to \mathbb{R}^m$ este continuă pe $[a,b]$ și matricea Jacobi J_f există în fiecare punct din $]a,b[$, atunci pentru orice $d \in \mathbb{R}^m$ există $c \in]a,b[$ astfel încât

$$<(f(c)-d)\cdot J_f(c)+c-\frac{a+b}{2}, b-a> = <\frac{f(a)+f(b)}{2}-d, f(b)-f(a)> \quad (6)$$

Demonstrație. Considerăm funcția reală de n variabile reale

$$F:D \to \mathbb{R},\ F(x)=<x-x_0,x-x_0>+<f(x)-d,f(x)-d>$$

cu $x_0 \in \mathbb{R}^n$ fixat arbitrar, de exemplu $x_0=0$.

Din ipotezele propoziției rezultă că F este continuă pe $[a,b]$ și gradientul ∇F există în fiecare punct din $]a,b[$. Aplicând teorema lui Lagrange funcției F deducem că există $c \in]a,b[$ astfel încât

$$< \nabla F(c), b-a> = F(b)-F(a) .$$

Înlocuind aici

$$\nabla F(x)=2(x-x_0)+2(f(x)-d)\cdot J_f(x) \quad \text{și}$$

$$F(b)-F(a)=< b-a,a+b-2x_0 >+< f(b)-f(a),f(a)+f(b)-2d >$$

ajungem la relația (6).

Având în vedere semnificația geometrică, enunțăm rezultatul pentru cazul particular m=1 și pentru cazul n=1.

Corolar 2.1 *Fie* $[a,b]\subset D\subseteq\mathbb{R}^n$, *D mulţime deschisă.Dacă funcţia* $f:D\to\mathbb{R}$ *este continuă pe* $[a,b]$ *şi are gradient în fiecare punct din* $]a,b[$, *atunci pentru orice* $d\in\mathbb{R}$ *există* $c\in]a,b[$ *astfel încât*

$$<(f(c)-d)\cdot\nabla f(c)+c-\frac{a+b}{2},b-a>=\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}-d\right)\cdot(f(b)-f(a)) \quad (7)$$

Observaţie. Dacă $f(a)=\pm f(b)$, Corolarul 2.1 pentru $d=0$ afirmă că există $c\in]a,b[$, astfel încât:

$$<f(c)\cdot\nabla f(c)+c-\frac{a+b}{2},b-a>=0$$

şi reprezintă generalizarea problemei de pornire la funcţii reale de n variabile reale.

Interpretare geometrică. Considerăm $n\geq 2$. Notăm

$x=(x_1,\dots,x_n)$, $a=(a_1,\dots,a_n)$, $b=(b_1,\dots,b_n)$, $c=(c_1,\dots,c_n)$,

$\mathbb{R}^{n+1}=\{(x_1,\dots,x_n,y)\mid x_1,\dots,x_n,y\in\mathbb{R}\}$,

$A=(a_1,\dots a_n,f(a))$, $B=(b_1,\dots,b_n,f(b))$.

Graficul funcţiei f este o hipersuprafaţă în spaţiul $\mathbb{R}^{n+1}$, cu ecuaţia $y=f(x_1,\dots,x_n)$, $(x_1,\dots,x_n)\in D$.

Dacă $f'_{x_1},\dots,f'_{x_n}$ sunt continue pe $]a,b[$, relaţia (7) exprimă faptul că dreapta normală la această hipersuprafaţă în punctul $(c_1,\dots,c_n,f(c))$, având ecuaţiile:

$$\begin{cases} x_1+f'_{x_1}(c)\cdot y-f(c)\cdot f'_{x_1}(c)-c_1=0\\ \quad\dots\\ x_n+f'_{x_n}(c)\cdot y-f(c)\cdot f'_{x_n}(c)-c_n=0,\end{cases}$$

hiperplanul mediator coardei AB:

$$<b-a,x-\frac{a+b}{2}>+(f(b)-f(a))\cdot\left(y-\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)=0$$

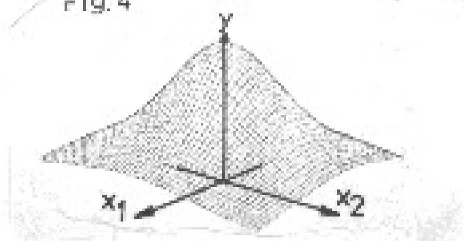
şi hiperplanul $y=d$ sunt concurente.

Exemplu. Pentru $n=2$, $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x_1,x_2)=\dfrac{1}{x_1^2+x_2^2+1}$ şi $a=(1,-4)$, $b=(-5,2)$, Corolarul 2.1 afirmă că oricare ar fi $d\in\mathbb{R}$, există $c\in]a,b[$, $c=(c_1,c_2)$, astfel încât în spaţiul $\mathbb{R}^3$ dreapta normală la suprafaţa (S): $y=\frac{1}{x_1^2+x_2^2+1}$, $(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$ (Fig.4) în punctul

$C\left(c_1,c_2,\frac{1}{c_1^2+c_2^2+1}\right)$ al suprafeţei,planul mediator coardei AB,unde

$A\left(1,-4,\frac{1}{18}\right)$; $B\left(-5,2,\frac{1}{30}\right)$, şi hiperplanul y=d sunt concurente.

Fig.4



Corolar 2.2 *Dacă funcţia $f:[a,b]\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}^m$ este continuă pe [a,b] şi derivabilă pe]a,b[, atunci pentru orice $d\in\mathbb{R}^m$ există $c\in]a,b[$ astfel încât*

$$(f(c)-d)\cdot J_f(c)+c=\left<\frac{f(a)+f(b)}{2}-d,\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right>+\frac{a+b}{2} \qquad (8)$$

Observaţie. Dacă $f(a)=\pm f(b)$, pentru d=0 Corolarul 2.2 afirmă că există $c\in]a,b[$ astfel încât

$$f(c)\cdot J_f(c)+c=\frac{a+b}{2}$$

şi reprezintă generalizarea problemei de pornire în cazul funcţiilor vectoriale de o variabilă reală.

Interpretare geometrică. Considerăm $m\geq2$. Notăm

$$d=(d_1,\ldots,d_m),f(x)=(f_1(x),\ldots,f_m(x)),y=(y_1,\ldots,y_m),$$
$$\mathbb{R}^{m+1}=\{(x,y_1,\ldots,y_m)\,|\,x,y_1,\ldots,y_m\in\mathbb{R}\},$$
$$A=(a,f_1(a),\ldots,f_m(a)),B=(b,f_1(b),\ldots,f_m(b)).$$

Graficul funcţiei f este curba $[\overset{\frown}{AB}]$ a spaţiului $\mathbb{R}^{m+1}$ cu ecuaţiile parametrice:

$$[\overset{\frown}{AB}]:\begin{cases}x=x\\y_1=f_1(x)\\\ldots\\y_m=f_m(x)\end{cases},\ x\in[a,b].$$

Relaţia (8) exprimă faptul că hiperplanul normal acestei curbe în punctul $(c, f_1(c), \ldots, f_m(c))$, având ecuaţia:

$$x+(y-f(c))\cdot J_f(c)-c = 0 ,$$

hiperplanul mediator coardei AB:

$$\left(x-\frac{a+b}{2}\right)+\left\langle \frac{f(b)-f(a)}{b-a}, y-\frac{f(a)+f(b)}{2}\right\rangle=0$$

şi dreapta y=d, respectiv $\begin{cases} y_1=d_1 \\ \ldots \\ y_m=d_m \end{cases}$ sunt concurente.

Cu alte cuvinte, în condiţiile Corolarului 2.2, în spaţiul $\mathbb{R}^{m+1}$, din orice punct al hiperplanului mediator coardei AB se poate duce cel puţin un hiperplan normal curbei $]\widehat{AB}[\ :\ y=f(x),\ x\in]a,b[$.

Exemplu. Pentru funcţia $f:[\frac{\pi}{2},\pi]\to\mathbb{R}^2, f(x)=(\cos x, \sin x)$, luând $d=(d_1,d_2)=(0,0)$, există $c\in\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$, anume $c=\frac{3\pi}{4}$, astfel încât planul normal arcului de elice

$$]\widehat{AB}[:\ \begin{cases} x=x \\ y_1=\cos x \\ y_2=\sin x \end{cases},\quad x\in\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$$

în punctul $(c, \cos c, \sin c)=(\frac{3\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ şi planul mediator coardei AB unde $A\left(\frac{\pi}{2},0,1\right)$; $B(\pi,-1,0)$, se intersectează pe axa Ox (Fig.5).

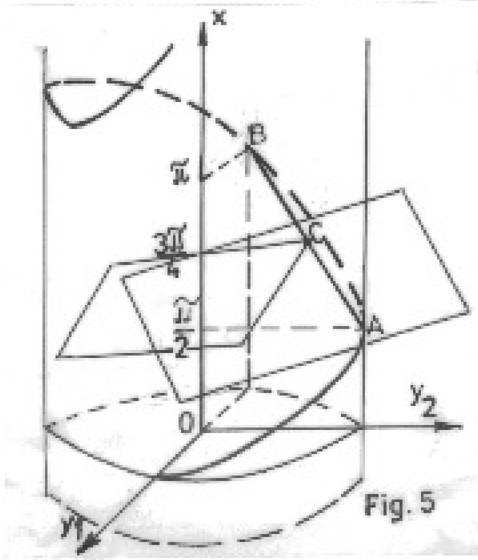


Fig. 5

BIBLIOGRAFIE

1. KOLUMBÁN, J., Problema nr.23278, Matematikai Lapok, Cluj, XLIII(1995), pag.36
2. FLETT, M.F., Differential Analysis, Cambridge, 1980

GENERALIZATIONS OF A MEAN VALUE THEOREM

ABSTRACT. In this paper we give generalizations with geometric interpretation of a mean value theorem proposed by Kolumbán J. [1]. Then we extend these results to $f:D\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, $f:D\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $f:[a,b]\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}^m$.

Universitatea din Baia Mare
Str. Victoriei nr.76, 4800 Baia Mare
ROMÂNIA