Lucrările Seminarului de
CREATIVITATE MATEMATICĂ
Vol.4(1994-1995),127-136

ASUPRA UNEI PROBLEME DE PARTIŢIONARE

Ioana ZELINA

Scopul acestei lucrări este prezentarea modului de construcţie a unui model matematic pentru o problemă practică şi apoi o metodă de rezolvare a acestei probleme cu ajutorul calculatorului.

Problema de la care se porneşte este problema **zonării**. Zonarea este procesul prin care o reţea de servicii este partiţionată în reţele mai mici, fiecare dintre acestea avînd un anumit grad de autonomie în ceea ce priveşte alocarea resurselor şi efectuarea operaţiilor specifice. Termenul de autonomie presupune că odată stabilită strategia generală şi odată hotărîtă alocarea resurselor, administratorul local are anumite libertăţi în luarea deciziilor.

Implicaţiile zonării sunt pe termen lung. După împărţirea unei reţele în subreţele aceste subreţele vor fi tratate independent în ceea ce priveşte drepturile lor de a poseda resurse şi de a opera cu ele. Un avantaj al împărţirii unei reţele în subreţele este că facilitează modelarea şi rezolvarea problemelor privind strategia reţelelor locale; în loc să avem de a face cu un model vast cu calcule complexe se vor rezolva mai multe probleme mai mici de acelaşi tip.

Pentru a împărţi o reţea de servicii în subreţele se vor respecta cîteva criterii naturale.

Criteriul echităţii. În contextul serviciilor furnizate, mai ales în sectorul public, conceptul de echitate afirmă că întreaga populaţie de potenţiali clienţi trebuie să fie tratată în mod egal în ce priveşte calitatea serviciilor oferite. Deci subreţelele în care este împărţită reţeaua trebuie să genereze cereri de servicii egale. In practică este dificil de realizat egalitatea perfectă între cereri de aceea este permisă o anumită deviere de la cererea medie.

Criteriul contiguităţii. O subreţea este contiguă dacă există cel puţin un drum între oricare dintre nodurile sale care să nu treacă prin altă subreţea. Acest drum nu este neapărat cel mai scurt.

Criteriul compactităţii. O interpretare intuitivă a acestui criteriu este ca marginile unei zone să nu fie prea îndepărtate unele de altele. În partiţionarea unei zone planare compactitatea se poate exprima prin asemănarea zonei cu un pătrat sau un cerc sau prin distanţa rezonabilă a populaţiei faţă de centrul zonei.

Enclave. În procesul zonării trebuie să ne asigurăm că nu se creează enclave. O enclavă este un nod sau o mulţime de noduri ce nu pot forma o subreţea din cauza criteriului echităţii, iar pe de altă parte nodurile nu pot fi conectate cu alte noduri din motive de contiguitate.

Modelul matematic al problemei.

Fie o reţea cu N noduri. Se va modela această reţea ca un graf G(V,E) unde V={ 1, 2,..., N} este mulţimea nodurilor(adică a clienţilor), iar E este mulţimea muchiilor. Deci E={(i,j)| există un drum direct între clienţii i şi j}. Fiecărei muchii (i,j) i se asociază o pondere l(i,j) ce reprezintă lungimea drumului între i şi j, iar fiecărui nod i se asociază un număr h_i ce reprezintă ponderea din cererea totală de servicii generată de nodul i, $i=\overline{1,N}$

$$\sum_{i=1}^{N} h_i=1 \ .$$

Problema care se pune este partiţionarea acestei reţele în M zone N_j, fiecărei zone corespunzîndu-i subreţeaua $G_j(V_j,E_j)$, $j=\overline{1,M}$ care să fie disjuncte, să formeze o acoperire a reţelei şi să satisfacă criteriile enumerate. Iată formularea matematică a acestor criterii:

Echitate: dacă M este numărul de subrețele în care se va împărți rețeaua atunci echitate perfectă se obține cînd cererea generată de fiecare subrețea este h=1/M. Se va permite o anumită deviație de la h, α, $0<\alpha<1$. Atunci N_i este acceptabilă din punct de vedere al echității dacă $\left|\sum_{j\in N_i} h_j - h\right| \le \alpha \cdot h$.

Contiguitate: fie matricea B pătratică de ordin N unde

$$B_{ik}=\begin{cases} 1, & daca\ (i,k)\in E \\ 0, & \in caz\ contrar \end{cases}$$

Zona N_j este contiguă dacă subrețeaua $G_j(V_j, E_j)$ este conexă.

Compactitate: zona N_j este compactă dacă cea mai scurtă distanța dintre două noduri ale sale nu depășește o valoare prestabilită B. Fie matricea pătratică C astfel încît

$$C_{ik}=\begin{cases} 1, & daca\ d(i,k)<\beta \\ 0, & în\ caz\ contrar \end{cases}$$

unde d(i,k) este cea mai scurtă distanță de la i la k în N_j. Zona N_j este compactă dacă $\forall a,b \in N_j,\ C_{ab}=1$.

Pentru rezolvarea problemei trebuie parcurse două faze. În prima fază se determină mulțimea S a zonelor compatibile cu criteriile de mai sus. Fie s numărul zonelor acceptabile. În faza a doua, din această mulțime S se aleg zonele ce acoperă fiecare nod o singură dată. Se alege de obicei o funcție scop ce trebuie optimizată. Nu există reguli pentru funcțiile scop. Se încearcă de obicei optimizarea uneia din restricțiile impuse.

Fie f o funcție scop. Dacă S este mulțimea zonelor acceptabile(din punct de vedere al echității, contiguității, compactității și enclavelor) și X_j o variabilă binară astfel încît

$$X_j=\begin{cases} 1, & daca\ zona\ j\ este\ selectata \\ 0, & în\ caz\ contrar \end{cases}$$

Problema zonării se va formula ca o problemă de programare discretă astfel:

$$\begin{cases} \min\ f \\ \sum_{j=1}^{s} a_{ij} \cdot X_j = 1, \quad i=1,N \\ \sum_{j=1}^{s} X_j = M \\ X_j = 0,\ 1, \quad j=1,s \\ \text{unde } a_{ij} = 1 \text{ daca } i \in N_j \text{ si } 0 \text{ altfel} \end{cases}$$

Pentru a ilustra modul de rezolvare a problemei urmărind cele doua faze vom considera rețeaua G din figura 1.

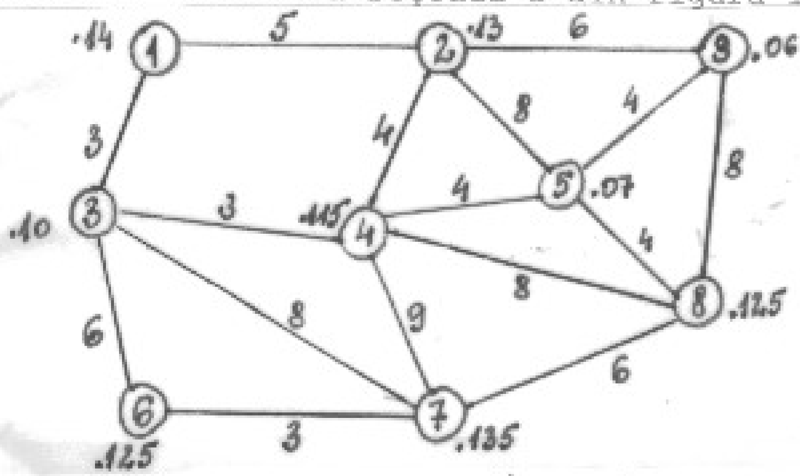

figura 1

Ne propunem să partiționăm rețeaua G în 4 zone. Cererea ideala din fiecare zonă ar fi 0.25, dar permitem o deviație α=2.5%, deci o zonă este acceptabilă dacă generează o cerere cuprinsă între 22.5% și 27.5% din cererea totală. Pentru compactitate impunem ca cea mai scurtă distanță între oricare două noduri ale unei zone să nu depășească 10 unități.

Faza I: determinarea zonelor compatibile cu cerințele impuse. Metoda folosită pentru determinarea zonelor acceptabile va fi un algoritm de căutare în arbore. Începem cu un nod oarecare și adăugăm noduri adiacente menținînd compactitatea pînă cînd cererea devine acceptabilă. Cînd cererea dapășește marginea superioară se face backtracking în arbore. În timpul acestui proces se acordă atenție eliminării enclavelor. Se creează o enclavă N1 dacă

$\sum_{i \in N1} h_i < \frac{1}{M} - \frac{\alpha}{M}$ și în același timp nu se poate găsi un nod care să se adauge la N1 pentru a satisface echitatea din cauză că nu satisface contiguitatea.

În algoritm începem cu nodul cu numărul cel mai mic neconsiderat încă și construim pentru el un arbore. Luăm de exemplu nodul 1. Nodul 1 va fi rădăcină pentru arbore(fig. 1).

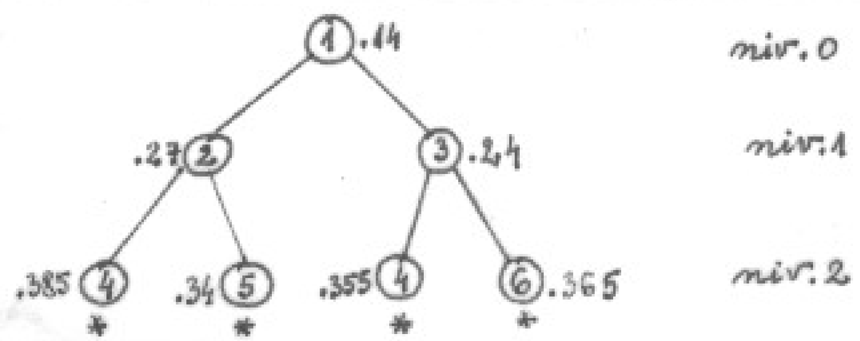

figura 2

Folosind matricile B și C găsim toate nodurile ce satisfac contiguitatea și compactitatea. Aceste noduri sunt pe nivelul 1. Pentru fiecare drum din acest arbore calculăm cererea totală. Dacă cererea totală satisface echitatea nodurile de-a lungul drumurilor (drumurile 1-2 și 1-3) se creează zone legitime {1,2} și {1,3}. Dacă cererea depășește marginea superioară marcăm nodul respectiv cu asterisc arătînd că nu am găsit o cale bună și nu continuăm ramificarea arborelui din acel nod. Luăm apoi fiecare dintre nodurile nemarcate de pe nivelul 1 și continuăm ramificarea cu noduri ce satisfac compactitatea și contiguitatea. Din nodul 2 se poate continua ramificarea cu nodurile 4 și 5. Mulțimile {1,2,4} și {1,2,5} sunt contigue și compacte, dar calculînd cererea totală se observă că se depășește limita admisă. Marcăm nodurile 4 și 5 cu asterisc și ramificăm arborele pornind din nodul 3. Mulțimile {1,3,4} și {1,3,6} sunt compacte și contigue, dar nu satisfac echitatea. Se marchează cu asterisc nodurile 4 și 6. Pe nivelul 2 nu avem noduri nemarcate deci vom începe construcţia arborelui cu rădăcina 2 şi vom continua cu celelalte.

Iată de exemplu arborele cu rădăcina 3(fig. 3):

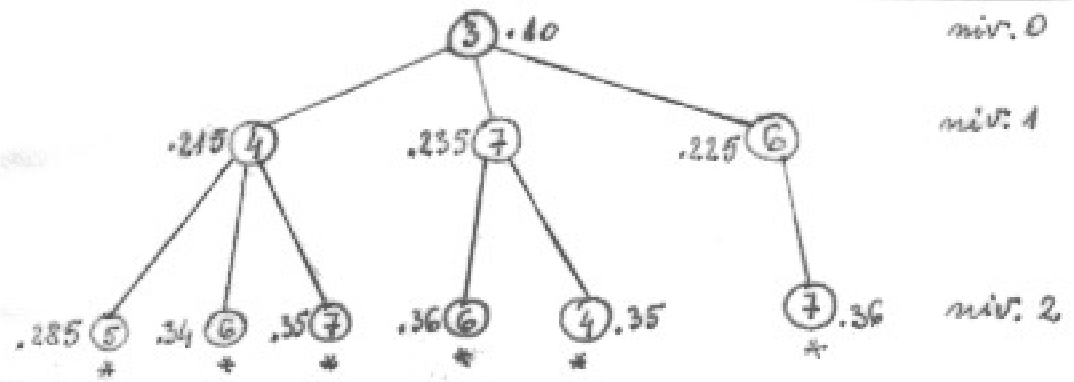

figura 3

Faza I se încheie cînd s-au găsit toate zonele acceptabile şi s-a construit un tabel cu aceste zone, cererea generată de fiecare, deviaţia relativă şi eventual alte mărimi care ar putea fi optimizate. Pentru exemplul considerat tabelul este:

Nr. zonei	Noduri	Cerere(%)	Deviaţie relativă	Secţiunea (lista)
1	1, 2	27	0.8	1
2	1, 3	24	0.4	1
3	2, 4	24.5	0.2	2
4	2, 5, 9	26	0.4	2
5	3, 6	22.5	1.0	3
6	4, 5, 9	24.5	0.2	4
7	4, 7	25	0.0	4
8	4, 8	24	0.4	4
9	5, 8, 9	25.5	0.2	5
10	6, 7	26	0.4	6
11	7, 8	26	0.4	7

unde deviaţia relativă reprezintă $\dfrac{\left|\sum_{i\in N_j} h_i - \frac{1}{M}\right|}{\frac{\alpha}{M}}$, iar în ultima coloană a tabelului se găseşte nodul din care a început construcţia arborelui pentru zona respectivă. Zonele care se construiesc din arbori cu aceeaşi rădăcină vor face parte din aceeaşi secţiune (listă).

Faza II: rezolvarea problemei de optimizare.

Vom căuta o astfel de împărţire în zone încît deviaţia relativă maximă c să fie minimă.

Fie A o matrice N x s unde

$$a_{ij}=\begin{cases} 1, \text{ daca nodul } i \text{ este în zona } N_j \\ 0, \text{ în caz contrar} \end{cases}$$

Pentru exemplul dat avem matricea A

zona / nod	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
3	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0
4	0	0	1	0	0	1	1	1	0	0	0
5	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0
6	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0
7	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1
8	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1
9	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0

Definim ca variabile fixe zonele ce trebuie să facă parte din orice soluţie acceptabilă a problemei, deci zonele N_j pentru care $X_j=1$. Notăm r_1, r_2, ..., r_n liniile lui A şi c_1, ..., c_k coloanele.

Fie $e_j=(0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$ unde 1 este pe poziţia j.

Excluderea de zone din soluţie se va descrie prin ştergeri de linii şi coloane din matricea A. Soluţia optimă se va citi din matricea A rămasă după ce se vor face toate reducerile posibile.

Sunt adevărate următoarele proprietăţi(justificările sunt evidente):

Proprietatea 1: dacă există o linie zero în A problema nu are soluţie.

O linie zero în A înseamnă un nod care nu face parte din nici o zonă acceptabilă, deci neacoperibil.

Proprietatea 2: dacă există $r_k = e_j$ atunci $X_j=1$. În continuare orice linie t din A cu $a_{tj}=1$ poate fi ştearsă şi orice coloană p cu $a_{tp}=1$ poate fi ştearsă.

Evident dacă există o linie cu un singur 1 înseamnă că există o singură zonă care conţine un anumit nod. Aceasta trebuie să facă parte neapărat din soluţie şi atunci alte zone care conţin noduri din zona fixată nu vor face parte din soluţie(fiecare nod trebuie să fie acoperit de o singură zonă).

Proprietatea 3: dacă $r_k \geq r_t$($r_{kj} \geq r_{tj}$, j=1,s) atunci linia k poate fi ştearsă, la fel orice coloană j pentru care $a_{kj}=1$ şi $a_{tj}=0$.

Proprietatea 4: dacă $a_k \geq a_t$ atunci coloana t poate fi ştearsă, la fel orice linie j cu $r_{jk}=1$ şi $r_{jt}=0$.

Algoritmul este unul de partiţionare a nodurilor şi se va termina cînd s-au fixat M variabile.

Notaţii: D mulţimea variabilelor fixate
N(D) numărul variabilelor fixate
U mulţimea de noduri din zonele din D
Y mulţimea zonelor din soluţia parţială curentă
T nodurile din zonele din Y.

Algoritmul:

Pas 1. Iniţializare: l=0; Y:=D; T:=U;

Pas 2. Alegerea listei următoare: se ia nodul cu numărul cel mai mic neacoperit încă în soluţia parţială(deci care nu e în T). Dacă toate nodurile sunt acoperite de mai puţin de M zone mergi la *Pas 4.* Dacă există noduri neacoperite un indicator arată acest lucru.

Pas 3. Adăugarea unei zone la Y. Se începe cu poziţia indicată în listă şi se verifică ca nodurile din acea zonă să nu fie în T. Dacă condiţia este îndeplinită adăugăm zona la Y şi nodurile sale la T şi se trece la *Pas 5.* Altfel trecem la următoarea zonă cu deviaţie minimă din aceeaşi listă(cu acelaşi nod de început) şi repetăm *Pas 3*. Dacă nu mai există zone adecvate în listă se trece la *Pas 4*.

Pas 4. Backtracking. Dacă l=0 stop; altfel l:=l-1. Scoatem din Y ultima zonă adăugată şi din T nodurile corespunzătoare şi se trece la *Pas 3*.

Pas 5. Test pentru soluţie. l:=l+1. Dacă l=M-N(D) şi toate nodurile sunt acoperite se trece la *Pas 6*. Dacă l=M-N(D) şi există noduri neacoperite se trece la *Pas 4*. Dacă l< M-N(D) se trece la *Pas 2*.

Pas 6. Determinarea unei soluţii. Valoarea soluţiei, c, este cea mai mare deviaţie a unei zone din Y. Se pot şterge toate zonele cu deviaţie mai mare ca aceasta. Daca nu se fac ştergeri se trece la *Pas 4* altfel se trece la *Pas 7*.

Pas 7. Se aplică reduceri în A şi se determină D şi U. Se trece la *Pas 4*.

Iată acest algoritm aplicat pentru exemplul dat:

Proprietatea 2 nu este satisfăcută deci nu se poate fixa nici o variabilă la acest nivel.

D:=0; U:=0; N(D):=0;

Pas 1. l:=0; Y:=0; T:=0;

Pas 2. lista 1

Pas 3. N_2:={1,3}; Y:={2}; T:={1,3}

Pas 5. l=1< 4

Pas 2. lista 2

Pas 3. N_3:={2,4}; Y:={2,3}; T:={1,2,3,4}

Pas 5. l=2< 4

Pas 2. lista 5

Pas 3. N_9:={5,8,9}; Y:={2,3,9}; T:={1,2,3,4,5,8,9}

Pas 5. l=3< 4

Pas 2. lista 10.

Pas 3. N_{10}:={6,7}; Y:={2,3,9,10}; T:={1,2,3,4,5,6,7,8,9}

Pas 5. l=4; toate nodurile sunt acoperite.

Pas 6. c=0.4. Se şterg zonele 1 şi 5.

Pas 7. reducerea matricii A: se şterg coloanele 1 şi 5; se şterg liniile 1,3,6,7 şi coloanele 2,7,10,11; se şterge linia 5. Se obține matricea:

zone / nod	3	4	6	8	9
2	1	1	0	0	0
4	1	0	1	1	0
8	0	0	0	1	1
9	0	1	1	0	1

Există în matricea redusă două posibilități: zonele { 3, 9} și { 4, 8}. Se verifică că ambele soluții { 2, 3, 9, 10} și { 2, 4, 8, 10} dau valoarea c= 0.4 deci sunt optimale.

BIBLIOGRAFIE

1. HANDLER, G.Y., Minimax Location of a Facility in an Undirected Tree Graph, Transportation Science 7, 287-293, 1973
2. AHITUV, N., BERNAN, O., Operations Management of Distributed Service Networks, Plenum Press, New York, 1988
3. MOLDOVAN, G., Bazele informaticii II, lito. Univ."Babeş-Bolyai", Cluj-Napoca, 1985

ABOUT THE "ZONING" PROBLEM

ABSTRACT. In this paper is described a mathematic model for the "zoning" problem, that means the division of a service network in a number of networks with a relative autonomy concerning the local management and resources alocation. We also give an algorithm that solve this problem.

Universitatea din Baia Mare
Str. Victoriei nr.76,4800 Baia Mare
ROMÂNIA