Lucrările Seminarului de
CREATIVITATE MATEMATICĂ
Vol.4 (1994-1995), 137-144

# SERII LEGATE DE NUMĂRUL "e"

Ioan CIONCA*

Problema E:2361 din [1] cere să se demonstreze convergenţa simplă a seriei $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left[e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]$.

Aceasta rezultă imediat aplicând criteriul Leibniz, deoarece din $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\nearrow e$ avem $e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\searrow 0$ .

Faptul că seria nu converge absolut, adică faptul că seria $\sum_{n=1}^{\infty}\left[e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]$ este divergentă, rezultă din

$$e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots+\frac{1}{n!}+\dots-\Bigg[1+1+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)}{2!}+$$

$$+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{3!}+\dots+\left(\frac{1}{n}\right)^{n}\Bigg]=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2!}+\left[1-\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\right]\cdot\frac{1}{3!}+\dots>\frac{1}{2n},$$

aplicând criteriul de comparaţie la inegalitate ([2]).

Scopul acestei note este să stabilim, că seria

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left[e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\alpha}\right] \tag{1}$$

---

** Lucrare prezentată de Ioan Cionca student anul I, la Sesiunea Ştiinţifică a Studenţilor, Universitatea din Baia Mare, aprilie 1995, sub indrumarea lector Kovács Gabriella.*

este convergentă pentru orice $\alpha\in\mathbb{R}$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\alpha}\right] \tag{2}$$

este convergentă pentru $\alpha=\frac{1}{2}$ şi divergentă pentru $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{\frac{1}{2}\}$;

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n+\alpha}-e\right] \tag{3}$$

este convergentă pentru orice $\alpha\in\mathbb{R}$,

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n+\alpha}-e\right] \tag{4}$$

este convergentă pentru $\alpha=\frac{1}{2}$ şi divergentă pentru $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{\frac{1}{2}\}$;

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n+\alpha}-\frac{1}{e}\right] \tag{5}$$

este convergentă pentru orice $\alpha\in\mathbb{R}$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n+\alpha}-\frac{1}{e}\right] \tag{6}$$

este convergentă pentru $\alpha=-\frac{1}{2}$ şi divergentă pentru

$\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{-\frac{1}{2}\}$;

$$\sum_{n=}(-1)^{n}\left[1-\frac{1}{\phantom{n}}{}^{n+}-\frac{1}{\phantom{e}}\right] \tag{7}$$

este convergentă pentru orice $\alpha\in\mathbb{R}$,

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+\alpha}-\frac{1}{e}\right] \tag{8}$$

este convergentă pentru $\alpha=-\frac{1}{2}$ şi divergentă pentru

$\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{-\frac{1}{2}\}$.

Convergenţa seriilor alternante (1),(3),(5) şi (7) rezultă din criteriul Leibniz, după cum vom vedea în cele ce urmează.

În [3], prin studiul funcției $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\alpha}$ se arată, că pentru orice $\alpha\in\mathbb{R}$, șirurile convergente la e

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\alpha}$$

sunt monotone: crescătoare,dacă $\alpha<\frac{1}{2}$ și descrescătoare,dacă $\alpha\geq\frac{1}{2}$ .

Din monotonia șirurilor $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\alpha}$ deducem mai jos monotonia șirurilor

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n+\alpha}=\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1-(\alpha-1)} \text{ : descrescător, dacă } \alpha\leq\frac{1}{2}$$

crescător, dacă $\alpha>\frac{1}{2}$ ;

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n+\alpha}=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+(-\alpha)}} \text{ : crescător, dacă } \alpha\leq-\frac{1}{2}$$

descrescător, dacă $\alpha>-\frac{1}{2}$ ;

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+\alpha}=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1+(\alpha+1)}} \text{ : descrescător, dacă } \alpha<-\frac{1}{2}$$

crescător, dacă $\alpha\geq-\frac{1}{2}$ .

În consecință, pentru orice $\alpha\in\mathbb{R}$, șirurile

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\alpha}-e$$

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n+\alpha}-e$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n+\alpha}-\frac{1}{e}$$

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+\alpha}-\frac{1}{e}$$

converg la 0 monoton.

Astfel seriile alternante (1),(3),(5),(7) îndeplinesc condiţiile criteriului Leibniz.

Pentru studiul seriilor (2),(4),(6),(8), ne servim de formulele

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e\left[1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}+\frac{11}{24}\cdot\frac{1}{n^{2}}\right]+o\left(\frac{1}{n^{2}}\right)$$

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}=e\left[1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}+\frac{11}{24}\cdot\frac{1}{n^{2}}\right]+o\left(\frac{1}{n^{2}}\right)$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}=\frac{1}{e}\left[1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}-\frac{5}{24}\cdot\frac{1}{n^{2}}\right]+o\left(\frac{1}{n^{2}}\right)$$

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}=\frac{1}{e}\left[1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}-\frac{5}{24}\cdot\frac{1}{n^{2}}\right]+o\left(\frac{1}{n^{2}}\right)$$

obţinute (sub formă mai generală) în [4] prin dezvoltarea în serie de puteri în jurul originii a funcţiilor $(1\pm x)^{\pm\frac{1}{x}}$, precum şi de dezvoltările binomiale

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha}=1+\alpha\cdot\frac{1}{n}+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\cdot\frac{1}{n^{2}}+o\left(\frac{1}{n^{2}}\right)$$

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\alpha}=1-\alpha\cdot\frac{1}{n}+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\cdot\frac{1}{n^{2}}+o\left(\frac{1}{n^{2}}\right)$$

în care $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, $\alpha\in\mathbb{R}$, iar "o" notează simbolul lui Landau.

Prin înmulţire deducem:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\alpha}=e\left[1+\frac{2\alpha-1}{2n}+\frac{12\alpha^{2}-24\alpha+11}{24n^{2}}\right]+o\left(\frac{1}{n^{2}}\right)\quad \text{(vezi[4])} \qquad (9)$$

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n+\alpha}=e\left[1-\frac{2\alpha-1}{2n}+\frac{12\alpha^{2}-24\alpha+11}{24n^{2}}\right]+o\left(\frac{1}{n^{2}}\right) \qquad (10)$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n+\alpha}=\frac{1}{e}\left[1+\frac{2\alpha+1}{2n}+\frac{12\alpha^{2}-5}{24n^{2}}\right]+o\left(\frac{1}{n^{2}}\right) \qquad (11)$$

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+\alpha}=\frac{1}{e}\left[1-\frac{2\alpha+1}{2n}+\frac{12\alpha^{2}-5}{24n^{2}}\right]+o\left(\frac{1}{n^{2}}\right). \qquad (12)$$

Urmează să aplicăm seriilor (2),(4),(6) şi (8) criteriul de comparaţie la limită. Menţionăm, că aceste serii au fiecare termenii de semn constant (deoarece, după cum s-a arătat, termenii converg la 0 monoton).

Dacă $\alpha=\frac{1}{2}$ , din relaţia (9) avem

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\alpha}-e}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{e}{12n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}}=\frac{e}{12},\quad \text{finită.}$$

Deoarece seria $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ este convergentă, pe baza criteriului de comparaţie menţionat rezultă că seria (2) este convergentă.

Pentru $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{\frac{1}{2}\}$, din (9) rezultă

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\alpha}-e}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{e\,\frac{2\alpha-1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}=e\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)\neq 0\,.$$

Cum seria $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ este divergentă, pe baza aceluiaşi criteriu obţinem că seria (2) este divergentă.

Procedăm la fel pentru a deduce natura seriilor (4),(6) şi (8).

Utilizăm relația (10).

Dacă $\alpha=\frac{1}{2}$: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n+\alpha}-e}{\frac{1}{n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{e}{12n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}}=\frac{e}{12}$, finită

$\Rightarrow$ seria (4) este convergentă;

dacă $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{\frac{1}{2}\}$: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n+\alpha}-e}{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-e\frac{2\alpha-1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}=e\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)\neq 0$

$\Rightarrow$ seria (4) este divergentă.

Utilizăm relația (11).

Dacă $\alpha=-\frac{1}{2}$: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n+\alpha}-\frac{1}{e}}{\frac{1}{n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-\frac{1}{e}\cdot\frac{1}{12n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}}=-\frac{1}{12e}$, finită

$\Rightarrow$ seria (6) este convergentă;

dacă $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{-\frac{1}{2}\}$: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n+\alpha}-\frac{1}{e}}{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{e}\cdot\frac{2\alpha+1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}=\frac{1}{e}\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\neq 0$

$\Rightarrow$ seria (6) este divergentă.

Utilizăm relaţia (12).

Dacă $\alpha=-\frac{1}{2}$: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+\alpha}-\frac{1}{e}}{\frac{1}{n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-\frac{1}{e}\cdot\frac{1}{12n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}}=-\frac{1}{12e}$, finită

$\Rightarrow$ seria (8) este convergentă;

dacă $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{-\frac{1}{2}\}$: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+\alpha}-\frac{1}{e}}{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-\frac{1}{e}\cdot\frac{2\alpha+1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}=-\frac{1}{e}\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\neq 0$

$\Rightarrow$ seria (8) este divergentă.

**Observaţie.** Cunoscând natura seriilor (1) şi (2), înlocuind $\alpha$ cu $1-\alpha$, putem deduce natura seriilor (3), respectiv (4).
Din natura seriilor (5) şi (6), înlocuind $\alpha$ cu $-1-\alpha$, obţinem natura seriilor (7), respectiv (8).

## BIBLIOGRAFIE

1.American Mathematical Monthly,79(1972),pag. 663.
2.American Mathematical Monthly,80(1973),pag. 693.
3.American Mathematical Monthly,86(1979),pag. 772.
4.Andrica,D.,Tóth,L.:The Asymptotic Expansion of the Sequence $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.Selected papers from "Didactica Matematicii" volumes 1984-1992.Cluj,1992,pag. 1-5.

## SERIES CONNECTED WITH NUMBER "e"

**ABSTRACT.** In this paper series (1),(2),...,(8) connected with number "e" are tested for convergence.

Universitatea din Baia Mare
Str. Victoriei nr. 76, 4800 Baia Mare
ROMÂNIA