Lucrările Seminarului de

CREATIVITATE MATEMATICĂ

Vol.5 (1995-1996), 1-10

Dedicat Centenarului Gazetei Matematice (1895-1995)

PROBLEME COMENTATE

Dan BĂRBOSU

Această lucrare a fost prezentată la sesiunea de comunicări organizată la liceul " Vasile Lucaciu" din Baia Mare în 21.o1.1996 şi se adresează în primul rând elevilor de liceu.Pe parcursul ei se rezolvă câteva probleme publicate în paginile Gazetei Matematice din anii 1994 şi 1995,la rubricile " Probleme pregătitoare pentru O.I.M.şi O.B.M." şi respectiv "Concursul rezolvitorilor".

Criteriul de selecţie al problemelor este acela că toate utilizează esenţial o proprietate binecunoscută, exprimată în:

Propoziţia 1. Fie $a,b\in\mathbb{R}, a<b$ şi funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $f(x)=x^2-(a+b)x+ab$. Atunci $f(x)\leq 0$, $(\forall)\, x\in[a,b]$.

Vom exemplifica aplicarea acestei proprietăţi simple în rezolvarea unor probleme aparent dificile.

Problema 1. [3] *"Dacă* $0<m<M$, $n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$ *şi* $x_k\in[m,M]$ $(\forall)\, k=\overline{1,n}$, *să se demonstreze că:*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k(x_k+1)\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}\left(\frac{1}{x_k}+\frac{1}{mM}\right)\right)\leq\frac{(m+m^2+M+M^2)^2 n^2}{4m^2M^2}\ ."$$

Soluţie.

Deoarece $x_k\in[m,M]$, $(\forall)\,k\in\{1,2,\ldots,n\}\Rightarrow x_k^2\in[m^2,M^2]$, $(\forall)\,k\in\{1,2,\ldots,n\}$.
Aplicând propoziţia 1 se obţin inegalităţile

$$x_k+mM\frac{1}{x_k}\le m+M,\quad (\forall)\,k\in\{1,2,\ldots,n\}$$

$$x_k^2+m^2M^2\frac{1}{x_k^2}\le m^2+M^2,\quad (\forall)\,k\in\{1,2,\ldots,n\}.$$

Adunând membru cu membru inegalităţile precedente, obţinem

$$\sum_{k=1}^{n}x_k(1+x_k)+m^2M^2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}\left(\frac{1}{x_k}+\frac{1}{mM}\right)\le n(m+M+m^2+M^2)\ .$$

Conform inegalităţii mediilor, avem

$$\sum_{k=1}^{n}x_k(1+x_k)+m^2M^2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}\left(\frac{1}{x_k}+\frac{1}{mM}\right)\ge 2mM\sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n}x_k(x_k+1)\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}\left(\frac{1}{x_k}+\frac{1}{mM}\right)\right)}\,.$$

Rezultă deci că

$$\left(\sum_{k=1}^{n}x_k(x_k+1)\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}\left(\frac{1}{x_k}+\frac{1}{mM}\right)\right)\le\frac{(m+m^2+M+M^2)^2n^2}{4m^2M^2}$$

şi problema este rezolvată.

Problema 2. **[8]** "*Fie* $[a,b]\subset\mathbb{R}_+^*$, $m,p\in\mathbb{N}^*$. *Să se arate că oricare ar fi* $x_k\in[a,b]$, $k+\overline{1,n}$ *are loc inegalitatea*

$$4a^pb^p\left(\sum_{k=1}^{n}x_k^{m+p}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}x_k^{m-p}\right)\le(a^p+b^p)^2\left(\sum_{k=1}^{n}x_k^{m}\right)^2.\text{"}$$

Soluţie.

Deoarece $x_k\in[a,b]$, $(\forall)\,k\in\{1,2,\ldots,n\}\Rightarrow x_k^p\in[a^p,b^p]$, $(\forall)\,k\in\{1,2,\ldots,n\}$.
Aplicând atunci propoziţia 1 se obţin inegalităţile

$$x_k^p+a^p\cdot b^p\cdot x_k^{-p}\le a^p+b^p,\quad (\forall)\,k\in\{1,2,\ldots,n\}$$

Prin inmulţire cu x_k^m (care este pozitiv căci $x_k\in[a,b]\subset\mathbb{R}_+^*$) şi sumare după k, inegalitățile precedente conduc la

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^{p+m}+a^p b^p \sum_{k=1}^{n} x_k^{m-p} \le (a^p+b^p) \sum_{k=1}^{n} x_k^{m}.$$

Conform inegalității mediilor, membrul stâng se minorează în forma

$$4a^p b^p \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^{p+m}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^{m-p}\right) \le \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^{p+m}+a^p b^p \sum_{k=1}^{n} x_k^{m-p}\right)^2.$$

Prin urmare

$$4a^p b^p \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^{p+m}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^{m-p}\right) \le (a^p b^p)^2 \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^{m}\right)^2,$$

deci inegalitatea enunțului este demonstrată.

În problemele ce urmează a fi prezentate se îmbină aplicarea propoziției 1 cu o aplicare ingenioasă a inegalității mediilor.

Problema 3. [9] "*Dacă* $x_k \in [1,2]$, $(\forall) k=\overline{1,n}$ *are loc inegalitatea*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}\right)^2 \le n^3."$$

Soluție. Aplicând propoziția 1 se deduce ca și în soluțiile problemelor 1, 2 că are loc inegalitatea

$$\sum_{k=1}^{n} x_k+2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} \le 3n.$$

Membrul stâng se minorează (aplicând inegalitatea mediilor) după cum urmează:

$$\sum_{k=1}^{n} x_k+2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}=\sum_{k=1}^{n} x_k+\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}+\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} \ge 3\sqrt[3]{\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}\right)^2}.$$

Rezultă

$$\sqrt[3]{\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_n}\right)^2} \le n,$$

inegalitate echivalentă cu inegalitatea enunțului.

Problema 4. **[10]** "*Dacă* $a,b\in\mathbb{N}^*, a<b$ *și* $x_k\in[a,b]$, $(\forall)\, k=\overline{1,n}$ *atunci*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_n\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}\right)^{ab}\le\left(\frac{n(a+b)}{1+ab}\right)^{ab+1}."$$

Soluție. Ca și în soluția problemei 3 se obține

$$\sum_{k=1}^{n} x_k+ab\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}\le n(a+b).$$

Deoarece $a,b\in\mathbb{N}^*\rightarrow ab\in\mathbb{N}^*$, deci în membrul stâng al inegalității precedente figurează $(1+ab)$ numere pozitive, unul fiind $\sum_{k=1}^{n} x_k$ iar celelalte $a\cdot b$ egale între ele având valoarea comună $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}$.

Conform inegalității mediilor

$$\sum_{k=1}^{n} x_k+ab\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}\ge(1+ab)\sqrt[1+ab]{\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}\right)^{ab}}.$$

Rezultă

$$\sqrt[1+ab]{\left(\sum_{k=1}^{n} x_n\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_n}\right)^{ab}}\le\frac{n(a+b)}{1+ab}$$

din care, prin ridicare la puterea $(1+ab)$ se obține inegalitatea enunțului.

Observații.

i) Pentru $a=1, b=2$ problema 4 se reduce la problema 3.

ii) Afirmația enunțului rămâne valabilă(cu aceeași soluție) în ipoteza mai puțin restrictivă $a\cdot b\in\mathbb{N}^*$. Se va vedea în finalul notei că această ipoteză poate fi slăbită mai mult.

Problema 5. [4] "*Fie* $[a,b],[c,d]\subset\mathbb{R}_+^*$ *cu* $ab,cd\in\mathbb{N}$. *Să se arate că pentru orice* $m,n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$ *şi orice* $x_k\in[a,b]$, $k=\overline{1,m}$ $y_j\in[c,d]$, $j=\overline{1,n}$ *are loc inegalitatea*

$$\left(\sum_{k=1}^{m}x_k\right)\left(\sum_{j=1}^{n}y_j\right)\left(\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{x_k}\right)^{ab}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{y_j}\right)^{cd}\le\left(\frac{(a+b)m+(c+d)n}{2+ab+cd}\right)^{2+ab+cd}."$$

Soluţie. Ca şi în soluţia problemei precedente obţinem

$$\frac{1}{2+ab+cd}\left(\sum_{k=1}^{m}x_k+ab\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{x_k}+\sum_{j=1}^{n}y_j+cd\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{y_j}\right)\le\frac{m(a+b)+n(c+d)}{2+ab+cd}$$

Deoarece $ab,cd\in\mathbb{N}^*$, membrul stâng al inegalităţii precedente reprezintă media aritmetică a $(2+ab+cd)$ numere pozitive unul egal cu $\sum_{k=1}^{m}x_k$, unul egal cu $\sum_{j=1}^{n}y_j$, **ab** egale cu $\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{x_k}$ şi **cd** egale cu $\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{y_j}$. Aplicând inegalitatea mediilor obţinem

$$\left(\left(\sum_{k=1}^{m}x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{x_k}\right)^{ab}\left(\sum_{j=1}^{n}y_j\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{y_j}\right)^{cd}\right)^{\frac{1}{2+ab+cd}}\le\frac{m(a+b)+n(c+d)}{2+ab+cd}$$

din care se obţin (prin ridicare la puterea naturală $2+ab+cd$) inegalitatea enunţului.

În continuare vom redemonstra un rezultat cunoscut sub denumirea "inegalitatea generalizată a mediilor" care permite slăbirea ipotezelor problemelor 4 şi 5.

Propoziţia 2. Fie $n\in\mathbb{N}^*, a_i,p_i\in\mathbb{R}_+^*$ $(\forall)$ $i=\overline{1,n}$ şi $p=\sum_{i=1}^{n}p_i$

Are loc inegalitatea

(1) $$\left(\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n} p_i a_i\right)^p \geq \prod_{i=1}^{n} a_i^{p_i}.$$

Demonstrație. Considerăm funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x$. Deoarece $f''(x)=-\frac{1}{x^2}<0$, $(\forall)\, x\in(0,+\infty)$, funcția considerată este concavă, și conform inegalității lui Jensen deducem că pentru $(\forall)\, x_1,x_2,\ldots,x_n\in(0,+\infty)$, $(\forall)\, \alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\in(0,1)$ cu $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1$ are loc

$$\ln\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i\right)\geq\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\ln x_i=\sum_{i=1}^{n}\ln x_i^{\alpha_i}=\ln\left(\prod_{i=1}^{n}x_i^{\alpha_i}\right).$$

Ținând cont de monotonia funcției logaritmice, inegalitatea precedentă conduce la

(2) $$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i\geq\prod_{i=1}^{n}x_i^{\alpha_i}.$$

În (2) alegem $\alpha_i=\frac{p_i}{p}$, $x_i=a_i$, $(\forall)\, i=\overline{1,n}$ și obținem

$$\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n}p_i a_i\geq\left(\prod_{i=1}^{n}a_i^{p_i}\right)^{\frac{1}{p}},$$

inegalitate echivalentă cu inegalitatea enunțului.

Problema 6. *Fie* $0<a<b$ *și* $n\in\mathbb{N}^*, n\geq 2$. *Să se arate că oricare ar fi* $x_1,x_2,\ldots,x_n\in[a,b]$, *are loc inegalitatea*

$$\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}\right)^{ab}\leq\left(\frac{n(a+b)}{1+ab}\right)^{1+ab}.$$

Soluţie. Din ipoteza că $x_1, \ldots, x_n \in [a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$ se obţine fără nici o dificultate inegalitatea

$$\frac{1}{1+ab}\sum_{k=1}^{n} x_k + \frac{ab}{1+ab}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k} \le \frac{n(a+b)}{1+ab}.$$

Folosind acum inegalitatea generalizată a mediilor (1) cu

$p_1 = \frac{1}{1+ab}$, $a_1 = \sum_{k=1}^{n} x_k$, $p_2 = \frac{ab}{1+ab}$, $a_2 = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}$, ajungem la inegalitatea

$$\frac{1}{1+ab}\sum_{k=1}^{n} x_k + \frac{ab}{1+ab}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k} \ge \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{1+ab}}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}\right)^{\frac{ab}{1+ab}}.$$

Rezultă deci că

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{1+ab}}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}\right)^{\frac{ab}{1+ab}} \le \frac{n(a+b)}{1+ab}$$

iar de aici

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}\right)^{ab} \le \left(\frac{n(a+b)}{1+ab}\right)^{1+ab},$$

şi problema este rezolvată.

Observaţie. Problema 6 este o generalizare a problemei 4. Totodată, problema 6 generalizează problema din [5] în care se cere ipoteza suplimentară $ab \in Q$

Problema 7. *Fie* $[a,b], [c,d] \subset \mathbb{R}_+^*$. *Să se arate că pentru orice* $m, n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ *şi orice* $x_k \in [a,b]$, $k = \overline{1,m}$, $y_j \in [c,d]$, $j = \overline{1,n}$ *are loc inegalitatea*

$$\left(\sum_{k=1}^{m} x_k\right)\left(\sum_{j=1}^{n} y_j\right)\left(\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{x_k}\right)^{ab}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{y_j}\right)^{cd} \le \left(\frac{(a+b)m+(c+d)n}{2+ab+cd}\right)^{2+ab+cd}.$$

Soluţie. Ca în problema 5 se obţine

$$\frac{1}{2+ab+cd}\sum_{k=1}^{m} x_k+\frac{ab}{2+ab+cd}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{x_k}+\frac{1}{2+ab+cd}\sum_{j=1}^{n} y_j+\frac{cd}{2+ab+cd}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{y_j}\le$$

$$\le\frac{m(a+b)+n(c+d)}{2+ab+cd}.$$

Aplicând acum inegalitatea generalizată a mediilor (1) cu

$$p_1=\frac{1}{2+ab+cd},\quad a_1=\sum_{k=1}^{n} x_k,\quad p_2=\frac{ab}{2+ab+cd},\quad a_2=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{x_k}$$

$$p_3=\frac{1}{2+ab+cd},\quad a_3=\sum_{j=1}^{n} y_j,\quad p_4=\frac{cd}{2+ab+cd},\quad a_4=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{y_j}$$

obţinem inegalitatea

$$\frac{1}{2+ab+cd}\left(\sum_{k=1}^{m} x_k+ab\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{x_k}+\sum_{j=1}^{n} y_j+cd\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{y_j}\right)\le$$

$$\le\left(\left(\sum_{k=1}^{m} x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{x_k}\right)^{ab}\left(\sum_{j=1}^{n} y_j\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{y_j}\right)^{cd}\right)^{\frac{1}{2+ab+cd}}.$$

Rezultă atunci că are loc inegalitatea

$$\left(\left(\sum_{k=1}^{m} x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{x_k}\right)^{ab}\left(\sum_{j=1}^{n} y_j\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{y_j}\right)^{cd}\right)^{\frac{1}{2+ab+cd}}\le\frac{(a+b)m+(c+d)n}{2+ab+cd},$$

care este echivalentă cu inegalitatea enunţului.

Observaţie. Problema 7 întăreşte problema 5 prin renunţarea la ipotezele $ab, cd\in\mathbb{N}^*$.

Recomandăm celor interesaţi de această problematică excelentele lucrări [1], [2], [6], [7].

BIBLIOGRAFIE

1. BĂTINEŢU,D.M. şi colab., Analiză matematică. Exerciţii şi probleme, Editura Militară, Bucureşti, 1992, pag. 9-27.

2. BĂTINEŢU,D.M., În legătură cu inegalitatea lui L.V.Kantorovici, Gazeta Matematică nr.2, 1994, pag.51-60

3. BĂTINEŢU,D.M., Problema O:745, Gazeta Matematică nr.3, 1994

4. BĂTINEŢU,D.M., Problema C:1544, Gazeta Matematică nr.6, 1994

5. BĂTINEŢU,D.M., Problema O:757, Gazeta Matematică nr.7, 1994

6. BĂTINEŢU,D.M., Inegalitatea lui Kantorovici pentru polinoame, Gazeta Matematică nr.8, 1994, pag. 337-341

7. BĂTINEŢU,D.M., CONSTANTINESCU,Al., Asupra unei probleme dată la barajul pentru definitivarea echipei olimpice a României 1977, Gazeta Matematică nr.9, 1994, pag. 387-390

8. BĂTINEŢU,D.M., Problema O:787, Gazeta Matematică nr.5, 1995

9. PANAITOPOL,L., Problemă dată la barajul pentru definitivarea echipei olimpice a României 1977

10. SZÖLLÖSY,G., Problema 18911*, Gazeta Matematică nr.9, 1981

SOME COMPETITION PROBLEMS

Abstract. In this paper we solve some competition problems proposed in Gazeta Matematică. The main results of the paper are the problems 6 and 7 in which we give the generalizations of the problems from [4], [5] and [10].

Universitatea din Baia Mare
Str. Victoriei nr. 76, 4800 Baia Mare
ROMÂNIA