Lucrările Seminarului de
CREATIVITATE MATEMATICĂ
Vol.5 (1995-1996), 11-16

Dedicat Centenarului Gazetei Matematice (1895-1995)

O METODĂ UNITARĂ PENTRU RIDICAREA LA PUTERE A MATRICELOR DE ORDINUL DOI

Dan BĂRBOSU

Vom prezenta o metodă unitară pentru ridicarea la putere a unei matrici pătrate de ordinul doi cu elemente numere reale.

Fie

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R}),\ TrA=a+d,\ \det A=ad-bc,$$

I_2 matricea unitate de ordinul doi iar O_2 matricea nulă de ordinul doi.

Lema 1. Are loc egalitatea

$$(1)\qquad A^2-(trA)A+(\det A)I_2=O_2 .$$

Demonstraţie. Simplă verificare prin calcul.

Observaţii.

i) Egalitatea (1) face obiectul problemei 6, pag. 19 din [1].

ii) Lema 1 constituie un caz particular al teoremei Cayley-Hamilton.

Pentru detalii relative la această teoremă recomandăm lucrarea [2].

Lema 2. Dacă $n\in\mathbb{N}^*$, atunci A^n este de forma

$$(2)\qquad A^n=\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$$

unde $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}, (c_n)_{n\in\mathbb{N}}, (d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sunt şiruri de numere reale.

Demonstrație. Notând $a_1=a, b_1=b, c_1=c, d_1=d$ deducem că (2) este adevărată pentru $n=1$.

Să presupunem că (2) este adevărată pentru $n=k$ și să demonstrăm că ea rămâne adevărată pentru $n=k+1$.
Avem

$$A^{k+1}=A^k A=\begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} aa_k+cb_k & ba_k+db_k \\ ac_k+cd_k & bc_k+dd_k \end{pmatrix}.$$

Punând $a_{k+1}=a\cdot a_k+c\cdot b_k$, $b_{k+1}=b\cdot b_k+d\cdot b_k$, $c_{k+1}=a\cdot c_k+c\cdot d_k$, $d_{k+1}=b\cdot c_k+d\cdot d_k$, deducem că (2) rămâne adevărată pentru $n=k+1$. În baza principiului inducției complete rezultă că (2) este adevărată pentru orice număr natural $n\in\mathbb{N}^*$.

Lema 3. Șirurile $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}, (c_n)_{n\in\mathbb{N}}, (d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din (2) sunt șiruri liniar recurente de ordin doi și satisfac aceeași relație de recurență, de forma

$$(3) \qquad x_{n+2}-(TrA)x_{n+1}+(\det A)x_n=0.$$

Demonstrație. Prin înmulțirea relației(1) cu A^n deducem că

$$A^{n+2}-(TrA)A^{n+1}+(\det A)A^n=O_2.$$

Folosind reprezentarea (2) și egalitatea precedentă rezultă că (3) are loc pentru fiecare din șirurile $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}, (c_n)_{n\in\mathbb{N}}, (d_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Problema determinării puterii a n-a a matricei A se reduce așadar la determinarea termenului general al șirului (3). Această problemă este rezolvată în

Lema 4. Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir de numere reale ce satisface o relație de recurență liniară de ordinul doi cu coeficienți constanți, adică

$$(4) \qquad \alpha x_{n+2}+\beta x_{n+1}+\gamma x_n=0,\ (\forall)\, n\in\mathbb{N}^*$$

unde $x_1, x_2\in\mathbb{R}$ sunt dați, iar $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ sunt constanți.

Fie deasemenea

(5) $$\alpha r^2+\beta r+\gamma=0$$

ecuaţia caracteristică a şirului ce satisface (4) şi r_1, r_2 rădăcinile lui (5). Sunt adevărate afirmaţiile de mai jos

i) Dacă $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, $r_1 \neq r_2$ atunci

(6) $$x_n=C_1 r_1^n+C_2 r_2^n$$

ii) Dacă $r_1=r_2=r$, atunci

(7) $$x_n=r^n(C_1+nC_2)$$

iii) Dacă $r_{1,2}=|r|(\cos t \pm i\sin t)$ atunci

(8) $$x_n=|r|^n(C_1\cos nt+C_2\sin nt).$$

C_1 şi C_2 sunt constante reale care se determină din condiţiile iniţiale.

O demonstraţie a lemei 4 se găseşte în [4].

Prin urmare, problema ridicării la putere a oricărei matrici $A\in M_2(\mathbb{R})$ este complet rezolvată de lemele 2, 3 şi 4.

Prezentăm în continuare unele aplicaţii ale metodei.

Aplicaţia 1. [1, pag.20, problema 18] Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}0 & a\\ a & 0\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R}^*)$ şi se cere $A^n\,(n\in\mathbb{N}^*)$.

Soluţie. Conform lemei 2 avem $A^n=\begin{pmatrix}a_n & b_n\\ c_n & d_n\end{pmatrix}$.

Deoarece $TrA=0$ *şi* $\det A=-a^2$, în conformitate cu lema 3, şirurile $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}, (c_n)_{n\in\mathbb{N}}, (d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfac relaţia de recurenţă

$$x_{n+2}-a^2x_n=0\ .$$

Ecuaţia caracteristică a acestei recurenţe liniare are rădăcinile reale şi distincte $r_1=-a, r_2=a$.

Aplicând lema 4, afirmaţia i), deducem că $x_n=a^n[C_1\cdot(-1)^n+C_2]$.

Deoarece $A=\begin{pmatrix}0 & a\\ a & 0\end{pmatrix}$, $A^2=\begin{pmatrix}a^2 & 0\\ 0 & a^2\end{pmatrix}$, impunând condițiile $x_1=0, x_2=a^2$, obținem termenii generali ai șirurilor $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ și respectiv $(d_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Evident $a_n=d_n$, căci cele două șiruri satisfac aceleași condiții inițiale. Impunând condițiile $x_1=a, x_2=0$, obținem termenii generali ai șirurilor $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ și respectiv $(c_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Din nou avem $b_n=c_n$.

După efectuarea calculelor anterior descrise se obține

$$A^n=a^n\begin{pmatrix}\frac{1+(-1)^n}{2} & \frac{1+(-1)^{n-1}}{2}\\ \frac{1+(-1)^{n-1}}{2} & \frac{1+(-1)^n}{2}\end{pmatrix}.$$

Aplicația 2. [5, problema 23191] Fie $a,b\in\mathbb{R}, a\neq 0$. Demonstrați egalitatea

$$\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}=(\sqrt{a^2+b^2})^n\begin{pmatrix}\cos(n\,\mathrm{arc\,tg}\frac{b}{a}) & -\sin(n\,\mathrm{arc\,tg}\frac{b}{a})\\ \sin(n\,\mathrm{arc\,tg}\frac{b}{a}) & \cos(n\,\mathrm{arc\,tg}\frac{b}{a})\end{pmatrix}.$$

Soluție. Fie $A=\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}$. Aplicând lema 2 avem

$$A^n=\begin{pmatrix}a_n & b_n\\ c_n & d_n\end{pmatrix}.$$

Deoarece $TrA=2a, \det A=a^2+b^2$ rezultă, conform lemei 3, că șirurile $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}, (b_n)_{n\in\mathbf{N}}, (c_n)_{n\in\mathbf{N}}, (d_n)_{n\in\mathbf{N}}$ satisfac relația de recurență

(7) $$x_{n+2}-2ax_{n+1}+(a^2+b^2)x_n=0\ .$$

Ecuația caracteristică asociată recurenței (7) are rădăcinile complexe și conjugate

(8) $$r_{1,2}=a\pm ib=\sqrt{a^2+b^2}(\cos(\mathrm{arc\,tg}\frac{b}{a})\pm i\sin(\mathrm{arc\,tg}\frac{b}{a}))$$

Conform lemei 4, afirmația iii), termenul general al șirului (7) este de forma

(9) $\quad x_n=(\sqrt{a^2+b^2})^n(C_1\cdot\cos(n\,\mathrm{arc\,tg}\frac{b}{a})+C_2\cdot\sin(n\,\mathrm{arc\,tg}\frac{b}{a}))$.

Deoarece $A=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, $A^2=\begin{pmatrix} a^2-b^2 & -2ab \\ 2ab & a^2-b^2 \end{pmatrix}$, condiţiile $x_1=a, x_2=a^2-b^2$ impuse şirului (9) conduc la determinarea termenilor generali ai şirurilor $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi respectiv $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Întrucât condiţiile iniţiale coincid, avem $a_n=d_n$, $(\forall)n\in\mathbb{N}$.

Condiţiile $x_1=-b, x_2=-2ab$ respectiv $x_1=b, x_2=2ab$ impuse şirului(9) conduc la aflarea termenilor generali ai şirurilor $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi respectiv $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Datorită condiţiilor iniţiale avem evident $b_n=-c_n$, $(\forall)n\in\mathbb{N}$.

După efectuarea calculelor indicate anterior obţinem afirmaţia enunţului.

Aplicaţia 3. [1, pag.20 ,problema 22]

Fie matricea $A=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})$,astfel încât $a^2+b^2<1$.

i) Să se arate că A^n este de forma $A^n=\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ -b_n & a_n \end{pmatrix}$.

ii) Să se demonstreze că şirurile $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sunt convergente şi au limita zero.

Soluţie. Dacă $a\neq 0$, cu un raţionament similar celui din soluţia de la aplicaţia 2, afirmaţia i) este verificată cu

$$a_n=(\sqrt{a^2+b^2})^n\cos(n\,\mathrm{arc\,tg}\frac{b}{a}),\ b_n=(\sqrt{a^2+b^2})^n\sin(n\,\mathrm{arc\,tg}\frac{b}{a}).$$

Deoarece $|a_n|\le(\sqrt{a^2+b^2})^n$, $|b|\le(\sqrt{a^2+b^2})^n$, $a^2+b^2<1$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=\lim\limits_{n\to\infty}|b_n|=0$ şi deci $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$.

Dacă $a=0$, cu un raţionament similar celui din soluţia de la aplicaţia 1, afirmaţia i) este verificată cu

$$a_n = |b|^n \cos\frac{n\pi}{2}, \quad b_n = |b|^n \sin\frac{n\pi}{2}.$$

Condiţia $a^2+b^2<1$ devine în acest caz $|b|<1$, ceea ce conduce la

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0.$$

Observaţie. O altă demonstraţie a afirmaţiei ii) se găseşte în [3].

BIBLIOGRAFIE

1. NĂSTĂSESCU,C. şi colab., Matematică. Manual pentru clasa a IX-a. Elemente de algebră superioară. Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1989
2. POP,S.M., Curs de Algebră liniară, geometrie analitică, diferenţială şi ecuaţii diferenţiale. Partea I. Algebră liniară, Litografia Universităţii din Baia Mare, 1993, pag.97-110
3. POPA,E., Matrici şi două şiruri recurente, Astra Matematică, vol.I, nr.2(1990), pag.26-27
4. TEODORESCU,N.(coordonator), Matematica în învăţământul gimnazial şi liceal, vol.II, Biblioteca Societăţii de Ştiinţe Matematice din R.S.R (1978), pag.270-279
5. Gazeta Matematică nr.2, 1995, pag.89

A GENERAL METHOD FOR THE COMPUTATION OF THE POWERS OF A MATRIX $A\in M_2(\mathbb{R})$

Abstract. In this paper we present a simple method for the computation of A^n for any matrix $A\in M_2(\mathbb{R})$ and $n\in\mathbb{N}^*$.

Universitatea din Baia Mare
Str. Victoriei nr. 76, 4800 Baia Mare
ROMÂNIA