Lucrările Seminarului de
CREATIVITATE MATEMATICĂ
Vol.5 (1995-1996), 17-24

Dedicat Centenarului Gazetei Matematice (1895-1995)

PUTERI FACTORIALE ŞI DETERMINANŢI VANDERMONDE

Dan BĂRBOSU

1. PUTERI FACTORIALE

1.1. Definiţie. Fie $x,h\in\mathbb{R}$ iar $n\in\mathbb{N}$. .Se numeşte putere factorială de exponent **n** şi pas **h** a lui **x** produsul notat prin $x^{[n,h]}$ şi definit prin

(1.1) $$x^{[n,h]}=x(x-h)\ldots(x-(n-1)h).$$

1.2. Observaţii.

i) Prin convenţie $x^{[0,h]}=1$.

ii) Pentru $h=0$ avem $x^{[n,0]}=x^n$, prin urmare noţiunea de putere factorială o generalizează pe aceea de putere obişnuită.

iii) Pentru $h=1$ se utilizează notaţia

(1.2) $$x^{[n,1]}=x^{[n]}=x(x-1)\ldots(x-n+1).$$

Dacă în (1.2) punem $x=n$, obţinem $n^{[n]}=n!$, deci noţiunea de putere factorială o generalizează pe aceea de factorial obişnuit. Puterile factoriale au proprietăţi analoage proprietăţilor puterilor obişnuite, dintre care vom prezenta câteva în cele ce urmează.

1.3. Lemă. Pentru orice $x, h, \in \mathbb{R}$, $m, n, \in \mathbb{N}$ are loc egalitatea

$$x^{[n+m,h]} = x^{[n,h]}(x-nh)^{[m,h]}. \tag{1.3}$$

Demonstraţie. Conform definiţiei puterii factoriale avem

$$x^{[n+m,h]} = x(x-h)\ldots(x-(n-1)h)(x-nh)\ldots(x-(n+m-1)h) =$$

$$= x^{[n,h]}(x-nh)(x-(n+1)h)\ldots(x-nh-(m-1)h) =$$

$$= x^{[n,h]}(x-nh)^{[m,h]}.$$

1.4. Observaţie. Relaţia (1.3) permite extinderea puterilor factoriale ale unui număr real **x** la puteri cu exponent negativ. Astfel, dacă $m \in \mathbb{N}$ şi $n=-m$, ţinând seama de convenţia făcută la 1.2. i), obţinem

$$x^{[-m,h]} = \frac{1}{(x+mh)^{[m,h]}}. \tag{1.4}$$

Alte detalii relative la proprietăţile puterilor factoriale pot fi consultate în lucrările [1], [2], [4].

2. DETERMINANŢI VANDERMONDE

2.1. Definiţie. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq z$ iar $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $h \in \mathbb{R}$. Vom numi **determinant Vandermonde generalizat de speţa întâia în sensul puterii factoriale** determinantul obţinut din determinantul Vandermonde obişnuit de ordin **n**, prin înlocuirea puterilor obişnuite cu puteri factoriale de exponent pozitiv ale elementelor $x_1, x_2, \ldots x_n$.

Vom nota prin $V_{[n,h]}(x_1, \ldots, x_n)$ determinantul Vandermonde generalizat de speţa întâia în sensul puterii factoriale:

$$V_{[n,h]}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ x_1^{[2,h]} & x_2^{[2,h]} & & x_n^{[2,h]} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{[n-1,h]} & x_2^{[n-1,h]} & & x_n^{[n-1,h]} \end{vmatrix}. \tag{2.1}$$

2.2. Teoremă. Are loc egalitatea

(2.2) $$V_{[n,h]}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i).$$

Demonstraţie. Vom demonstra (2.2) prin inducţie după n.

Pentru **n=2** avem

$$V_{[2,h]}(x_1 x_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1 = \prod_{1 \le i < j \le 2} (x_j - x_i),$$

deci egalitatea (2.2) are loc pentru **n=2**.

Presupunem că

$V_{[n,h]}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{1 \le i \le j \le n} (x_j - x_i)$ şi vom demonstra că are loc egalitatea

$$V_{[n+1,h]}(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = \prod_{1 \le i < j \le n+1} (x_j - x_i).$$

Avem

$$V_{[n+1,h]}(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_{n+1} \\ x_1^{[2,h]} & x_2^{[2,h]} & \ldots & x_{n+1}^{[2,h]} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ x_1^{[n-1,h]} & x_2^{[n-1,h]} & \ldots & x_{n+1}^{[n-1,h]} \\ x_1^{[n,h]} & x_2^{[n,h]} & \ldots & x_{n+1}^{[n,h]} \end{vmatrix}.$$

Notăm prin $L_1, L_2, \ldots, L_n, L_{n+1}$ liniile lui

$V_{[n+1,h]}(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1})$ şi efectuăm transformările

$L_2 - x_1 L_1, L_3 - (x_1 - h) L_2, \ldots, L_{n+1} - (x_1 - (n-1) h) L_n.$

Aplicând lema 1.3 obţinem

$$V_{[n+1,h]}(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & \ldots & x_{n+1} - x_1 \\ 0 & x_2(x_2 - x_1) & \ldots & x_{n+1}(x_{n+1} - x_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & x_2^{[n-1,h]}(x_2 - x_1) & \ldots & x_{n+1}^{[n-1,h]}(x_{n+1} - x_1) \end{vmatrix} =$$

$$= (x_2 - x_1) \ldots (x_{n+1} - x_1)\, V_{[n,h]}(x_2, x_3, \ldots, x_{n+1}).$$

Conform ipotezei de inducţie $V_{[n,h]}(x_2,\ldots,x_{n+1})=\prod_{2\le i<j\le n+1}(x_j-x_1)$.

Rezultă deci că

$$V_{[n+1,h]}(x_1,x_2,\ldots,x_{n+1})=(x_2-x_1)\ldots(x_{n+1}-x_1)\prod_{2\le i<j\le n+1}(x_j-x_i)=$$

$$=\prod_{1\le i<j\le n+1}(x_j-x_i),$$

adică tocmai egalitatea ce trebuie demonstrată.

În continuare vom prezenta unele aplicaţii ale teoremei 2.2.

Aplicaţia 1. [3] Dacă $n\in\mathbb{N}^*, n\ge 2$ iar $x_1,x_2,\ldots,x_n\in\mathbb{R}$, are loc egalitatea

$$V_n(x_1,\ldots,x_n)\underset{def}{=}\begin{vmatrix}1 & 1 & \ldots & 1\\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i).$$

Soluţie. Pentru $h=0$ avem $V_{[n,0]}(x_1,x_2,\ldots,x_n)=V_n(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ şi egalitatea enunţului are loc.

Aplicaţia 2. [5] Dacă $x_1,x_2,\ldots,x_n\in\mathbb{R}$ astfel încât $x_{i+1}-x_i=h$, pentru $(\forall)\, i\in\{1,2,\ldots,n-1\}$, atunci are loc egalitatea

$$V_{[n,h]}(x_1,x_2,\ldots,x_n)=h^{\frac{n(n-1)}{2}}(n-1)!\,(n-2)!\ldots 1!.$$

Soluţie. Conform teoremei 2.2 avem

$$V_{[n,h]}(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)=$$

$$=(x_n-x_1)(x_{n-1}-x_1)\ldots(x_2-x_1)\cdot(x_n-x_2)\ldots(x_3-x_2)\ldots(x_2-x_1)=$$

$$=(n-1)!\cdot h^{n-1}\cdot(n-2)!\,h^{n-2}\ldots 1!\,h=h^{(n-1)+(n-2)+\ldots+1}(n-1)!\,(n-2)!\ldots 1=$$

$$=h^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot(n-1)!\,(n-2)!\ldots 1!.$$

Aplicaţia 3. Fie $n,p_1,p_2,\ldots,p_n\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $n\ge 2$ şi $p_k\ge n-1$ pentru orice $k\in\{1,2,\ldots,n\}$. Dacă A_m^n desemnează numărul aranjamentelor de m elemente luate câte n, are loc egalitatea

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ A_{p_1}^1 & A_{p_2}^1 & \dots & A_{p_n}^1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{p_1}^{n-1} & A_{p_2}^{n-1} & \dots & A_{p_n}^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le i<j\le n} (p_j - p_i) .$$

Soluţie. Deoarece $A_{p_k}^1 = p_k^{[1]}$, determinantul din enunţ este $V_{[n,1]}(p_1,\dots,p_n)$; conform teoremei 2.2 avem

$$V_{[n,1]}(p_1,p_2,\dots,p_n) = \prod_{1\le i<j\le n} (p_j - p_i) .$$

2.3. **Definiţie.** Fie $n\in\mathbb{N}^*$, $n\ge 2$ iar $x_1,x_2,\dots,x_n$, $h\in\mathbb{R}$ cu proprietatea că $x_i+ih\ne 0$ pentru orice $i\in\{1,2,\dots,n-1\}$. Vom numi **determinant Vandermonde generalizat de speţa a doua în sensul puterii factoriale** determinantul obţinut din determinantul Vandermonde obişnuit de ordinul **n**, prin inlocuirea puterilor obişnuite cu puterile factoriale de exponent negativ ale elementelor $x_1,x_2,\dots,x_n$. Vom nota prin $V_{[-n,h]}(x_1,x_2,\dots,x_n)$ determinantul Vandermonde generalizat de speţa a doua în sensul puterii factoriale:

$$(2.3) \qquad V_{[-n,h]}(x_1,\dots,x_n) = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ x_1^{[-1;h]} & \dots & x_n^{[-1;h]} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^{[-(n-1);h]} & \dots & x_n^{[-(n-1);h]} \end{vmatrix} .$$

2.4. **Teoremă.** *Are loc egalitatea*

$$(2.4) \quad V_{[-n,h]}(x_1,\dots,x_n) = \prod_{i=1}^{n} x_i^{[-(n-1),h]} \cdot \prod_{1\le i<j\le n} (x_i - x_j) .$$

Demonstraţie. Stabilim (2.4) prin inducţie după n. Pentru $n=2$, avem

$$V_{[-2,h]}(x_1,x_2)=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1^{[-1,h]} & x_2^{[-1,h]} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \dfrac{1}{x_1+h} & \dfrac{1}{x_2+h} \end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{x_2+h}-\frac{1}{x_1+h}=\frac{x_1-x_2}{(x_1+h)(x_2+h)}=x_1^{[-1,h]}x_2^{[-1,h]}(x_1-x_2)=$$

$$=\prod_{i=1}^{2}x_i^{[-2(2-1),h]}\prod_{1\le i<j\le 2}(x_i-x_j),$$

deci (2.4) este adevărată pentru $n=2$.

Să presupunem că $V_{[-n,h]}(x_1,\ldots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}x_i^{[-(n-1),h]}\prod_{1\le i<j\le n}(x_i-x_j)$ şi să demonstrăm că

$$V_{[-(n+1),h]}(x_1,x_2,\ldots,x_n,x_{n+1})=\prod_{i=1}^{n+1}x_i^{[-n,h]}\prod_{1\le i<j\le n+1}(x_i-x_j)\ .$$

Avem

$$V_{[-(n+1),h]}(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1})=$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \dfrac{1}{x_1+h} & \dfrac{1}{x_2+h} & \cdots & \dfrac{1}{x_{n+1}+h} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \dfrac{1}{(x_1+nh)\ldots(x_1+h)} & \dfrac{1}{(x_2+nh)\ldots(x_2+h)} & \cdots & \dfrac{1}{(x_{n+1}+nh)\ldots(x_{n+1}+h)} \end{vmatrix}.$$

Notăm prin $L_1,L_2,\ldots,L_{n+1}$ liniile lui $V_{[-(n+1),h]}(x_1,x_2,\ldots,x_{n+1})$ şi efectuăm transformările $L_2-\frac{1}{x_1+h}L_1,\ L_3-\frac{1}{x_2+2h}L_2,\ldots,L_{n+1}-\frac{1}{x_1+nh}L_n$.

În urma acestor transformări obţinem succesiv

$$V_{[-(n+1),h]}(x_1,\ldots,x_{n+1})=$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & \frac{1}{x_2+h}-\frac{1}{x_1+h} & \dots & \frac{1}{x_{n+1}+h}-\frac{1}{x_1+h} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \frac{1}{(x_2+(n-1)h)(x_2+h)}\left(\frac{1}{x_2+nh}-\frac{1}{x_1+nh}\right) & \dots & \frac{1}{(x_{n+1}+(n-1)h)(x_{n+1}+h)}\left(\frac{1}{x_{n+1}+nh}-\frac{1}{x_1+nh}\right) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{x_1-x_2}{(x_1+h)\,(x_2+h)} & \dots & \frac{x_1-x_{n+1}}{(x_1+h)\,(x_{n+1}+h)} \\ & \vdots & \\ \frac{x_1-x_2}{(x_1+nh)\,(x_2+h)\cdots(x_2+nh)} & \dots & \frac{x_1-x_{n+1}}{(x_1+nh)\,(x_{n+1}+h)\cdots(x_{n+1}+nh)} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{(x_1-x_2)\dots(x_1-x_{n+1})}{(x_1+h)\dots(x_1+nh)} V_{[-n,h]}(x_2, x_3, \dots, x_{n+1}) =$$

$$= \frac{(x_1-x_2)\dots(x_1-x_{n+1})}{(x_1+h)\dots(x_1+nh)} \prod_{i=2}^{n+1} x_i^{[-n,h]} \prod_{2\le i<j\le n+1} (x_i-x_j) =$$

$$= \left(x_1^{[-n,h]} \cdot \prod_{i=2}^{n+1} x_i^{[-n,h]}\right)\left((x_1-x_2)\dots(x_1-x_{n+1}) \prod_{2\le i<j\le n+1} (x_i-x_j)\right) =$$

$$= \prod_{i=1}^{n+1} x_i^{[-n,h]} \prod_{1\le i<j\le n+1} (x_i-x_j),$$

adică tocmai egalitatea ce ne-am propus s-o demonstrăm.

Conform principiului inducţiei complete, egalitatea (2.4) are loc oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*, n\ge 2$.

2.5. **Observaţie**. Egalitatea (2.4) se poate obţine direct, ca şi consecinţă a teoremei 2.2, utilizând observaţia 1.4.

Invităm cititorul să formuleze singur şi alte aplicaţii ale teoremei 2.4, după modelul aplicaţiilor teoremei 2.2.

BIBLIOGRAFIE

1. AMURĂRIŢEI,Gh., SCHEIBER,E., Analiză numerică, curs şi culegere de probleme, vol.I, lito Univ. din Braşov, 1983
2. COMAN,Gh., Analiză numerică, Ed. LIBRIS, Cluj-Napoca, 1995
3. NĂSTĂSESCU,C., NIŢĂ,C., STĂNESCU,I., Matematică, elemente de algebră superioară, manual pentru clasa a XI-a, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1982
4. STANCU,D.D., Analiză numerică, curs şi culegere de probleme, lito Univ. Babeş-Bolyai, Cluj-Napoca, 1977
5. ŞANDRU,M., Problema C: 1475, Gazeta Matematică, nr.12, 1993

FACTORIAL POWERS AND VANDERMONDE DETERMINANTS

Abstract. In the section 1 we present the notion of factorial power of a real number **x** and some properties of this notion.

In the section 2 we introduce the notions of *"generalized Vandermonde determinant of type I"*, *"generalized Vandermonde determinant of type II"* with respect the factorial power. They are denoted by

$$V_{[n,h]}(x_1,\ldots,x_n) \quad \text{respectively} \quad V_{[-n,h]}(x_1,\ldots,x_n).$$

In the theorems 2.2 and 2.4, we establish formulas for the computation of $V_{[n,h]}(x_1,\ldots,x_n)$ and $V_{[-n,h]}(x_1,x_2,\ldots,x_n)$.

Universitatea din Baia Mare
Str. Victoriei nr. 76, 4800 Baia Mare
ROMÂNIA