Lucrările Seminarului de
CREATIVITATE MATEMATICĂ
Vol.5 (1995-1996), 25-28

Dedicat Centenarului Gazetei Matematice (1895-1995)

SISTEME DE ŞIRURI SUBCONVEXE DE ORDINUL ÎNTÂI

Dan BĂRBOSU

În lucrarea [1] s-a introdus noţiunea de şir subconvex de ordinul doi.

Definiţia 1. Şirul de numere reale nenegative $(x_n)_{n\geq 0}$ se numeşte subconvex de ordinul doi dacă $(\exists)\,\alpha_1, \alpha_2 \in (0,1)$, $\alpha_1+\alpha_2 \leq 1$ astfel încât pentru orice $n\in\mathbb{N}$ să fie satisfăcută inegalitatea

(1) $$x_{n+2} \leq \alpha_1 x_{n+1} + \alpha_2 x_n \ .$$

Privitor la convergenţa unui şir subconvex de ordin doi în aceeaşi lucrare [1] s-a demonstrat

Teorema 1. *Orice şir subconvex de ordin doi este convergent.*
În această notă se va introduce noţiunea de sistem de şiruri subconvexe de ordinul întâi şi se va studia convergenţa şirurilor ce formează un astfel de sistem.

Definiţia 2. Fie $A=(a_{ij})\in M_2(\mathbb{R})$ cu proprietăţile:

(2) $$Tr A \in (0,1)$$

(3) $$\det A \in (-1,0)$$

(4) $$Tr A - \det A \leq 1$$

Spunem că șirurile de numere reale nenegative $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ formează un **sistem subconvex de ordinul întâi** dacă, în ipotezele (2),(3),(4), pentru orice $n\in\mathbb{N}$ sunt indeplinite condițiile:

$$(5)\qquad \begin{cases} x_{n+1}\le a_{11}x_n+a_{12}y_n \\ y_{n+1}\le a_{21}x_n+a_{22}y_n \end{cases}.$$

Privitor la convergența șirurilor componente ale unui sistem subconvex de ordinul întâi are loc

Teorema 2. *Dacă șirurile* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *formează un sistem subconvex de ordinul întâi, atunci ele sunt convergente și au aceași limită.*

Demonstrație. Vom arăta că în ipotezele teoremei 2 fiecare din șirurile $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este subconvex de ordinul doi.

Ne ocupăm mai întâi de șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Transcriind prima relație a lui (5) pentru $n:=n+1$, avem

$$(6)\qquad x_{n+2}\le a_{11}x_{n+1}+a_{12}y_{n+1}.$$

Din (6) și din a doua inegalitate (5) obținem

$$(7)\ x_{n+2}\le a_{11}x_{n+1}+a_{12}a_{21}x_n-a_{22}(-a_{12}y_n),$$

iar din prima inegalitate (5) avem

$$(8)\qquad -a_{12}y_n\le a_{11}x_n-x_{n+1}.$$

Inegalitățile (7) și (8) conduc la inegalitatea

$$(9)x_{n+2}\le (TrA)x_{n+1}-(\det A)x_n\quad (\forall)\, n\in\mathbb{N}$$

care arată că în ipotezele (2),(3),(4), șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este subconvex de ordinul doi cu $\alpha_1=TrA, \alpha_2=-\det A$. In baza teoremei 1, șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent.

Procedând analog pentru șirul $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, obținem succesiv

$$y_{n+2}\le a_{21}x_{n+1}+a_{22}y_{n+1}\le a_{22}y_{n+1}+a_{21}a_{12}y_n-a_{11}(-a_{21}x_n)\le$$

$$\leq a_{22}y_{n+1}+a_{21}a_{12}y_n-a_{11}(a_{22}y_n-y_{n+1})=(a_{11}+a_{22})y_{n+1}-(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})y_n\ .$$

Deci $(y_n)_{n\in N}$ satisface relaţia

(10) $\quad y_{n+2}\leq(TrA)y_{n+1}-(\det A)y_n\quad(\forall)n\in\mathbb{N},$

adică $(y_n)_{n\in N}$ este subconvex de ordinul doi cu $\alpha_1=TrA$, $\alpha_2=-\det A$. Relaţiile (9) şi (10) arată că şirurile $(x_n)_{n\in N}$, $(y_n)_{n\in N}$ satisfac aceeaşi relaţie de subconvexitate de ordinul doi, prin urmare $\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}y_n$. Cu aceasta teorema este complet demonstrată.

Observaţii.

i) În ipoteza că $(z_n)_{n\in N}$ este un şir subconvex de ordin doi am demonstrat în [1] că şirul $(t_n)_{n\in N}$, de termen general

(11) $\quad t_n=x_{n+1}+(1-\alpha_1)x_n$

este convergent, iar convergenţa şirului $(t_n)_{n\in N}$ o implică pe aceea a şirului (x_n) .

ii) Notând $l=\lim_{n\to\infty}t_n$, din (11) rezultă că $\lim_{n\to\infty}x_n=\dfrac{l}{2-\alpha_1}$.

iii) Având în vedere observaţia ii) rezultă că dacă şirurile $(x_n)_{n\in N}$ şi $(y_n)_{n\in N}$ formează un sistem subconvex de ordinul întâi, atunci au loc egalităţile

(12) $$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}y_n=\frac{l}{2-TrA}$$

unde l este limita şirului (11) cu $\alpha_1=TrA$.

Consecinţă. Dacă şirurile de numere reale supraunitare $(x_n)_{n\in N}$, $(y_n)_{n\in N}$ satisfac, pentru $(\forall)n\in\mathbb{N}$, relaţiile

(13) $$\begin{cases} x_{n+1}\leq x_n^{a_{11}}y_n^{a_{12}} \\ y_{n+1}\leq x_n^{a_{21}}y_n^{a_{22}} \end{cases}$$

iar matricea $A=(a_{ij})\in M_2(\mathbb{R})$ satisface relațiile (2),(3),(4), atunci cele două șiruri sunt convergente și au aceeași limită.

Demonstrație. Șirurile $u_n=\ln x_n$, $v_n=\ln y_n$ formează un sistem subconvex de ordinul întâi în sensul definiției 2.
Conform teoremei 2 ele sunt convergente și au aceași limită, exprimată prin relația (12). Atunci $(x_n)_{n\in N}$, $(y_n)_{n\in N}$ sunt convergente și au aceași limită exprimată prin

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\lim_{n\to\infty} y_n=e^{\frac{l}{2-TrA}} \tag{14}$$

unde l este limita șirului (11).

BIBLIOGRAFIE

1. BĂRBOSU,D., Asupra unor recurențe subconvexe, Lucrările Seminarului de Creativitate Matematică, vol.3(1993-1994) pag.53-60

SISTEMS OF SUBCONVEX SEQUENCES OF FIRST ORDER

Abstract. The notion of "subconvex sistem of first order" is introduced in the definition 2. The main result of the note is contained in the theorem 2: "If the sequences $(x_n)_{n\in N}$, $(y_n)_{n\in N}$ form a subconvex sistem of first order in the sense of definition 2, then $(x_n)_{n\in N}$, $(y_n)_{n\in N}$ converge and $\lim_{n\to\infty} x_n=\lim_{n\to\infty} y_n$.

Universitatea din Baia Mare

Str. Victoriei nr. 76, 4800 Baia Mare

ROMÂNIA