Lucrările Seminarului de
CREATIVITATE MATEMATICĂ
Vol.5 (1995-1996), 29-34

Dedicat Centenarului Gazetei Matematice (1895-1995)

ASUPRA UNEI INECUAŢII FUNCŢIONALE

Dan BĂRBOSU

Sunt cunoscute rezultatele conţinute în următoarele două teoreme.

Teorema 1. [5] *Dacă* $f:[a,b]\to\mathbb{R}_+$ *este integrabilă pe* $[a,b]$ *atunci* $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.

Teorema 2. [1], [2], [6] *Dacă* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *este integrabilă pe* $[a,b]$, *atunci* $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx$.

Vom aplica aceste rezultate în scopul obţinerii unei metode unitare de rezolvare a unor inecuaţii funcţionale de tipul celor din [4], [7]. Cititorul interesat găseşte alte aplicaţii ale metodei în excelenta lucrare [1].

Pentru început vom rezolva efectiv două dintre problemele ce au condus la elaborarea acestei note.

P1. **[7, enunţ modificat]** "Să se determine funcţiile continue $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ care verifică inegalitatea

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\cos x\,dx \geq \frac{\Pi}{16} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2(\cos x)\,dx ."$$

Soluție. Conform teoremei 2, integrala din membrul stâng al inegalității se transformă succesiv în

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\cos x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin(\frac{\pi}{2}-x))\cos(\frac{\pi}{2}-x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\sin x\,dx .$$

Inegalitatea enunțului se transcrie deci în forma echivalentă

(1) $$\frac{\pi}{16}+\int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2(\cos x)\,dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\sin x\,dx\le 0 .$$

Să observăm că

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2x)\,dx=\frac{\pi}{4} .$$

Cu această observație (1) devine

(2) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(f(\cos x)-\frac{1}{2}\sin x)^2\,dx\le 0 .$$

Ținând cont că $(f(\cos x)-\frac{1}{2}\sin x)^2\ge 0$, $(\forall)\, x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ și aplicând teorema 1, din (2) deducem că $f(\cos x)=\frac{1}{2}\sin x$, $(\forall)\, x\in[0,\frac{\pi}{2}]$.

Prin urmare $f(t)=\frac{1}{2}\sqrt{1-t^2}$, $(\forall)\, t\in[0,1]$.

P2. **[4]** "Dacă $p>0$, să se determine funcțiile continue $f:[0,p]\to\mathbb{R}$ care verifică relația

$$2p\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(p\sin x)\cos x\,dx\ge\int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2(p\cdot\cos x)\,dx+\frac{\pi}{4}p^2 ."$$

Soluție. Urmând un procedeu similar celui din rezolvarea problemei P1, inegalitatea enunțului se scrie în forma echivalentă

(3) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(f(p\cos x)-p\sin x)^2\le 0 .$$

Din (3) (teorema 1) se obține $f(p\cos x)=p\sin x$ $(\forall)\, x\in[0,\frac{\pi}{2}]$, iar de aici $f(t)=\sqrt{p^2-t^2}$, $(\forall)\, t\in[0,p]$.

Stabilim acum un rezultat general care permite rezolvarea unitară a inecuațiilor funcționale de tipul celor întâlnite în problemele P1 și P2.

Lemă. Fie $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ astfel încât $a<b$, $c<d$ iar $\alpha,\beta\in\mathbb{R}^+$. Dacă

i) $g,h:[a,b]\to[c,d]$ sunt continue și neidentic nule pe $[a,b]$

ii) $g(a+b-x)=h(x)$, $(\forall)\ x\in[a,b]$

iii) $\beta\cdot g([a,b])=\{\beta\cdot g(x)\,|\,x\in[a,b]\}\subseteq[c,d]\}$
$\beta\cdot h([a,b])=\{\beta\cdot h(x)\,|\,x\in[a,b]\}\subseteq[c,d]\}$,

atunci unicele funcții $f\in C[c,d]$ care satisfac inecuația funcțională

(4) $$2\alpha\int_a^b f[\beta g(x)]\,h(x)\,dx\geq\int_a^b f^2[\beta h(x)]\,dx+\alpha^2\int_a^b g^2(x)\,dx$$

sunt soluțiile ecuației funcționale

(5) $$f[\beta h(x)]=\alpha\cdot g(x),\ (\forall)\ x\in[a,b].$$

Demonstrație. Vom arăta că mulțimea soluțiilor $f\in C[c,d]$ a lui (4) coincide cu mulțimea soluțiilor lui (5).

Fie $f\in C[c,d]$ o soluție a lui (4). Teorema 2 și ipoteza ii) conduc la exprimarea membrului stâng al lui (4) în forma

$$2\alpha\int_a^b f(\beta g(x))\,h(x)\,dx=2\alpha\int_a^b f(\beta g(a+b-x))\,h(a+b-x)\,dx=$$

$$=2\alpha\int_a^b f[\beta h(x)]\,g(x)\,dx.$$

După această transformare, (4) se scrie în forma echivalentă

(6) $$\int_a^b (f(\beta h(x))-\alpha g(x))^2dx\leq 0\,.$$

Din (6), prin intermediul teoremei 1, rezultă că $f[\beta(h(x))]=\alpha\cdot g(x)$ $(\forall)\ x\in[a,b]$, deci f este soluție a lui (5).

Fie acum $f\in C[c,d]$ o soluție a lui (5). Membrul stâng al lui (4) are atunci exprimarea

$$2\alpha\int_a^b f(\beta\cdot g(x))\,h(x)\,dx=2\alpha\int_a^b f(\beta g(a+b-x))\,h(a+b-x)\,dx=$$

$$=2\alpha\int_a^b f(\beta\cdot h(x))\,g(x)\,dx=2\alpha^2\int_a^b g^2(x)\,dx.$$

Membrul drept al lui (4) admite reprezentarea

$$\int_a^b f^2(\beta\cdot h(x))\,dx+\alpha^2\int_a^b g^2(x)\,dx=2\alpha^2\int_a^b g^2(x)\,dx\ .$$

Prin urmare orice soluţie $f\in C[c,d]$ a lui (5) satisface (4) cu egalitate. Cu aceasta lema este complet demonstrată.

Să observăm că particularizând în lemă $a=0, b=\frac{\pi}{2}, c=0, d=1,$

$$g:[0,\frac{\pi}{2}]\to[0,1],\ g(x)=\cos x,\ h:[0,\frac{\pi}{2}]\to[0,1],\ h(x)=\sin x, \beta=1, \alpha=\frac{1}{2},$$

regăsim problema P1.

Dacă în lemă particularizăm $a=0, b=\frac{\pi}{2}, c=0, d=1, g:[0,\frac{\pi}{2}]\to[0,1]$

$$g(x)=\cos x,\ h:[0,\frac{\pi}{2}]\to[0,1],\ h(x)=\sin x, \alpha=\beta=p,$$

regăsim problema P2.

Particularizând convenabil parametrii ce intervin în lemă se poate obţine o colecţie de inecuaţii funcţionale de tipul (4).

BIBLIOGRAFIE

1.ARSINTE,V., Probleme elementare de calcul integral, Editura Universităţii Bucureşti, 1995

2. BĂRBOSU,D., Substituţii de tip translaţie în integrala definită, în "Matematica-Teme de sinteze şi teste", lito. Universitatea din Baia Mare, 1991, pag. 68-70

3. BĂRBOSU,D., Asupra unor ecuaţii funcţionale, Lucrările seminarului de Creativitate Matematică, vol.I(1991-1992), pag. 71-80

4. BĂTINETU-GIURGIU,D.M., Problema 21960, Gazeta Matematică nr.1, 1989

5. BOBOC,N., COLOJOARĂ,I., Elemente de analiză matematică, Manual pentru clasa a XII-a, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti 1992

6. DONCIU,N., FLONDOR,D., Algebră şi analiză matematică, Culegere de probleme, vol.II., Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1979

7. KISS,L., Problema C:736, Gazeta Matematică Bucureşti, nr.1, 1987