Lucrările Seminarului de
CREATIVITATE MATEMATICĂ
Vol.5 (1995-1996), 35-38

Dedicat Centenarului Gazetei Matematice (1895-1995)

ASUPRA UNEI PROBLEME DE GEOMETRIE DIN MANUALUL PENTRU CLASA A IX-A

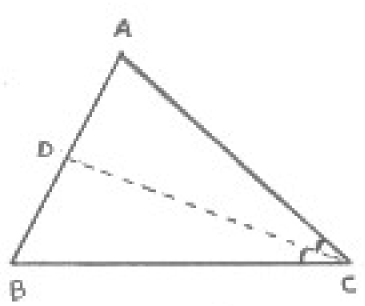
Dan BĂRBOSU şi Mihai BOLOŞ

Problema 14 de la pag.48 din [1] are enunţul:

"În triunghiul ABC se consideră bisectoarea unghiului $\hat{C}$ care intersectează latura (AB) în D. Demonstraţi că $CD<\sqrt{AC\cdot BC}$."

În [1] se schiţează o soluţie a acestei probleme care face apel la o construcţie ajutătoare. Vom prezenta aici două soluţii directe ale problemei.

Soluţia 1.



Aplicând relaţia lui Stewart avem:

(1) $BC^2\cdot AD+AC^2 BD-CD^2 AB=AD\cdot BD\cdot AB$

Cum CD este bisectoare în triunghiul ABC, avem

(2) $\dfrac{AD}{BD}=\dfrac{AC}{BC}$

Din (2) deducem expresiile segmentelor AD şi BD

(3) $$AD=\frac{AB\cdot AC}{AC+BC},\quad BD=\frac{AB\cdot BC}{AC+BC}.$$

Din (1) şi (3), după efectuarea calculelor, obţinem

$$CD^2=AC\cdot BC-\frac{AB^2\cdot AC\cdot BC}{(AB+BC)^2}<AC\cdot BC$$

şi problema este astfel rezolvată.

Soluţia 2. Se ştie (vezi [2]) că lungimea bisectoarei interioare CD a unghiului $\hat{C}$ al triunghiului ABC admite exprimarea

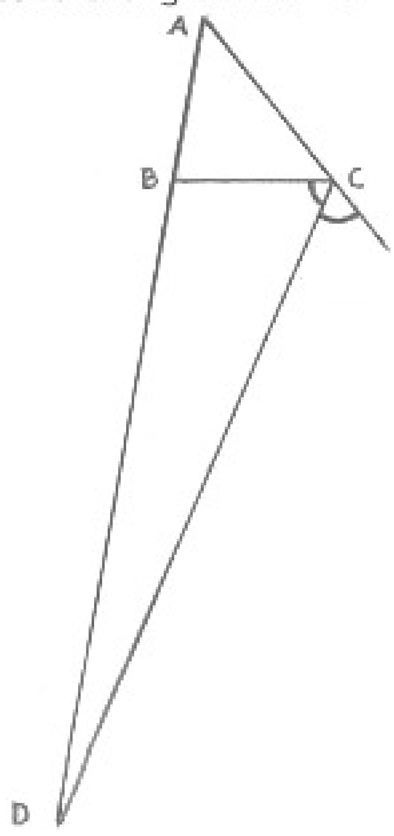
(4) $$CD=\frac{2\,AB\cdot BC}{AB+BC}\cos\frac{C}{2}.$$

Ţinând cont de inegalitatea între media armonică şi media geometrică, din (4) obţinem

$$CD=\frac{2}{\frac{1}{AB}+\frac{1}{BC}}\cdot\cos\frac{C}{2}\le\sqrt{AB\cdot BC}\cdot\cos\frac{C}{2}<\sqrt{AB\cdot BC}.$$

(Ultima inegalitate este strictă, căci $\cos\frac{C}{2}<1$.)

Observaţie. Vom examina situaţia în care CD este bisectoare exterioară a unghiului $\hat{C}$. Conform teoremei bisectoarei exterioare avem



(5) $$\frac{AC}{BC}=\frac{AD}{AB}.$$

Din (5) deducem expresiile lungimilor segmentelor AD şi BD, date în:

(6) $$AD=\frac{AB\cdot AC}{|AC-BC|},\quad BD=\frac{AB\cdot BC}{|AC-BC|}.$$

Folosind relaţia lui Stewart avem

(7) $$AC^2\cdot BD+CD^2\cdot AB-BC^2\cdot AD=AD\cdot BD\cdot AD.$$

Din (6) şi (7) deducem că are loc

(8) $$CD^2=AC\cdot BC\left(\frac{AB^2}{(AC-BC)^2}-1\right).$$

Relaţia (8) arată că dacă are loc relaţia

(9) $$AB < |AC - BC| \cdot \sqrt{2}$$

atunci lungimea bisectoarei exterioare CD a unghiului $\hat{C}$ verifică inegalitatea $CD < \sqrt{AC \cdot BC}$, iar dacă

(10) $$AB > |AC - BC| \cdot \sqrt{2}$$

atunci

$$CD > \sqrt{AC \cdot BC}.$$

BIBLIOGRAFIE

1. COŢA,A. şi colab., Matematică. Geometrie şi trigonometrie. Manual pentru clasa a IX-a, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1989
2. COŢA,A. şi colab., Matematică. Geometrie şi trigonometrie. Manual pentru clasa a X-a, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1988

ON A PROBLEM FROM THE MANUAL OF GEOMETRY FOR THE IXth CLASS

Abstract. Two direct solutions of the problem 14, pag.48, from [1] are presented.

Universitatea din Baia Mare
Str. Victoriei nr. 76, 4800 Baia Mare
ROMÂNIA

Gimnaziul "Nicolae Iorga"
4800 Baia Mare
ROMÂNIA