Lucrările Seminarului de
CREATIVITATE MATEMATICĂ
Vol.5 (1995-1996), 49-58

Dedicat Centenarului Gazetei Matematice (1895-1995)

ASUPRA UNOR PROBLEME PRIVIND DETERMINAREA IMAGINII UNEI FUNCŢII

Vasile BERINDE

În această notă vom grupa câteva probleme având o trăsătură comună: enunţul lor pretinde, direct sau indirect, determinarea imaginii unei anumite funcţii reale $f:A\to\mathbb{R}, A\subseteq\mathbb{R}$.

Găsim astfel de probleme în manualele şcolare, în culegerile de probleme şi revistele de matematică, unele dintre ele constituind subiecte date la olimpiadele şcolare [1],[2],[3],[4].

Reamintim că dacă $f:E\to F$ este o funcţie dată, atunci **imaginea funcţiei** f, notată de obicei $Im\, f$, este prin definiţie ([2]) mulţimea

$$f(E)=\{f(x)\,/\,x\in E\}=\{y\in F/\exists x\in E, y=f(x)\}.$$

Această noţiune intervine, spre exemplu, în caracterizarea funcţiilor surjective: $f:E\to F$ este surjectivă dacă şi numai dacă

$$F=Im\, f.$$

Problema 1. Determinaţi $Im\, f$ pentru $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2-4x+5}{x^2-2x+2}$.

([2], **Problema** 20, d) pag. 95)

Soluţie. Fie $\alpha \in Im f$ un element oarecare. Rezultă, pe baza definiţiei imaginii, că există $x \in \mathbb{R}$, a.î. $f(x) = \alpha$, adică

$$\exists x \in \mathbb{R}, \text{ a.î. } \frac{x^2-4x+5}{x^2-2x+2} = \alpha,$$

ceea ce este echivalent cu faptul că există $x \in \mathbb{R}$, a.î.

$$(1-\alpha)x^2+2(\alpha-2)x+5-2\alpha=0. \tag{1}$$

Rezultatul anterior exprimă tocmai faptul că ecuaţia (1) are rădăcini reale, ceea ce este echivalent cu faptul că discriminantul său, Δ, este mai mare sau egal cu zero,

$$4(\alpha-2)^2-4(1-\alpha)(5-2\alpha) \geq 0 \tag{2}$$

adică

$$\alpha^2-3\alpha+1 \leq 0,$$

inecuaţie a cărei soluţie este $\alpha \in \left[\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right]$.

Rezumând, rezultă că, pentru orice $\alpha \in Im f$, avem $\alpha \in \left[\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right]$, ceea ce este acelaşi lucru cu a spune că

$$Im f \subseteq \left[\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right]. \tag{3}$$

Să dovedim că are loc şi incluziunea inversă.

Într-adevăr, dacă $\alpha \in \left[\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right]$, atunci are loc inegalitatea (2) şi deci ecuaţia (1) admite rădăcini reale.

Acest lucru este echivalent cu faptul că există $x \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\alpha = \frac{x^2-4x+5}{x^2-2x+2},$$

adică cu faptul că există $x \in \mathbb{R}$, a.î. $f(x) = \alpha$, ceea ce arată că $\alpha \in Im f$.

Aceasta demonstrează că $\left[\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right] \subset Im\, f$, adică

$$Im\, f = \left[\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right]. \qquad (4)$$

Observaţie. Am insistat asupra tuturor detaliilor în rezolvarea problemei 1 - deşi este o problemă obişnuită - numai din considerente metodologice. Cei mai mulţi elevi (şi unii profesori!) rezolvă incomplet această problemă, considerând soluţia încheiată atunci când au demonstrat incluziunea (3), dar nu şi **egalitatea de mulţimi** (4)! Iată o problemă care însă cere explicit demonstrarea egalităţii de tipul (4).

Problema 2. Să se arate că

$$\{ a\in\mathbb{R} / a = \frac{x^2+x+1}{x+1}, x\in\mathbb{R} \} = (-\infty, -3] \cup [1, +\infty).$$

([2], Problema 14, pag. 28)

Soluţie. Reformulat, enunţul acestei probleme cere determinarea imaginii funcţiei $f:\mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x^2+x+1}{x+1},$$

care se rezolvă prin acelaşi procedeu ca la problema 1).

Lăsăm tot pe seama cititorului abordarea problemei 33, pag 7 din [3], al cărei enunţ adaptat este dat de

Problema 3. Fie $m\in\mathbb{R}$. Considerăm mulţimea

$$A_m = \{a\in\mathbb{R} / \exists x\in\mathbb{R} \text{ astfel încât } a = \frac{x^2+x+m}{x+1}\}.$$

Să se arate că: a) $A_0 = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$; b) $A_m = \mathbb{R}, \forall m<0$.

Problema 4. Fie $f:\mathbb{R}\to[a,b]$, $f(x) = \frac{x+m}{x^2+x+1}$, $a,b\in Q$, $m\in\mathbb{Z}$.

Se cer a,b,m astfel încât f să fie surjectivă.

(Olimpiada de matematică, faza naţională, 1993)

Soluţie. Funcţia f este surjectivă dacă şi numai dacă $Im\, f = [a,b]$.

Fie $\alpha\in Im\, f$. Rezultă că există $x\in\mathbb{R}$ a.î.

$$\alpha = \frac{x+m}{x^2+x+1},$$

adică

$$\alpha x^2 + (\alpha - 1)x + \alpha - m = 0, \tag{5}$$

ceea ce înseamnă de fapt că ecuația de gradul II (5) are rădăcini reale.

Aceasta se realizează pentru acele valori ale lui α, pentru care

$$(\alpha - 1)^2 - 4\alpha(\alpha - m) \geq 0,$$

adică

$$-3\alpha^2 + 2(m-1)\alpha + 1 \geq 0. \tag{6}$$

Soluția inecuației de gradul II (6) este intervalul

$$\left[\frac{1-m-2\sqrt{\Delta}}{6}, \frac{1-m+2\sqrt{\Delta}}{2}\right], \quad \Delta = (m-1)^2+3,$$

și se poate arăta, ca la problema 1, că $Im\,f$ coincide cu intervalul închis de mai sus. Pentru ca extremitățile acestui interval să fie raționale este necesar să avem

$$\sqrt{\Delta} \in Q,$$

ceea ce înseamnă (datorită condiției $m \in \mathbb{Z}$) că există

$k \in \mathbb{N}$, a.î. $\sqrt{\Delta} = k$, adică astfel încât

$$(m-1)^2 + 3 = k^2 \Rightarrow k^2 - (m-1)^2 = 3.$$

Din descompunerea în factori

$$(k-m+1)(k+m-1) = 3$$

și faptul că numerele k și m sunt întregi, rezultă doar două posibilități

$$a)\ \begin{cases} k-m+1=3 \\ k+m-1=1 \end{cases} \text{ sau } b)\ \begin{cases} k-m+1=1 \\ k+m-1=3, \end{cases}$$

celelalte două cazuri fiind excluse de pozitivitatea lui k.
Singura soluție, care se obține din sistemul a), este

$$k=2,\ m=0,$$

astfel că

$$a = -\frac{1}{2}\ ,\ b = \frac{5}{6},$$

şi tripletul $\left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{6}, 0\right)$ constituie unica soluţie a problemei.

Lăsăm ca exerciţiu pentru cititor rezolvarea următoarei probleme.

Problema 5. Fie $a,b,c>0$ şi $b^2-4c>0$. Determinaţi

$$Im\ f \text{ pentru } f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{x}{ax^2+bx+c}.$$

Problema 6. Determinaţi valorile posibile ale expresiei

$$\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1},\ \text{pentru } x\in\mathbb{R}.$$

(Olimpiada de matematică, faza finală, 1978, S.Rădulescu)

Soluţie. Deşi soluţia dată în continuare nu diferă esenţial de cea dată în [1] şi [4], o prezentăm totuşi în continuare, ea fiind reasamblată în spiritul metodei unitare de tratare a acestui tip de probleme, aşa cum a fost această metodă ilustrată prin exemplele de mai sus.

Problema este echivalentă cu a determina $Im\ f$ pentru funcţia

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}.$$

Este uşor de văzut că $f(x)$ are sens pentru orice $x\in\mathbb{R}$, că $f(0)=0 \Leftrightarrow x=0$ şi că $f(-x)=-f(x)$, adică funcţia f este impară. Este suficient să tratăm doar restricţia lui f la intervalul $(0,\infty)$, restricţie pe care o vom nota cu f_1.

Fie $\alpha\in Im\ f_1$. Rezultă că există $x\in(0,\infty)$ astfel încât

$$f_1(x)=\alpha,$$

adică astfel încât

$$\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}=\alpha. \tag{7}$$

Deoarece pentru $x>0$ avem $x^2+x+1>x^2-x+1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+x+1}>\sqrt{x^2-x+1}$, putem ridica la pătrat egalitatea (7), obţinând relaţia echivalentă

$$2(x^2+1)^2-2\sqrt{(x^2+1)^2-x^2}=\alpha^2.$$

Notăm $x^2+1=t$, așadar $t\in(1,\infty)$, și relația anterioară se scrie

$$2t-\alpha^2=2\sqrt{t^2-t+1},$$

care prin ridicare la pătrat (cu condiția suplimentară $2t-\alpha^2\geq 0$) ne dă

$$4(1-\alpha^2)t=4-\alpha^4,$$

de unde obținem ($\alpha>0$ din considerațiile anterioare și α nu poate fi 1)

$$t=\frac{\alpha^4-4}{4(\alpha^2-1)}.$$

Dar $t>1$, și atunci α este soluția inecuației

$$\frac{\alpha^4-4}{4(\alpha^2-1)}>1 \Leftrightarrow \frac{\alpha^4-4\alpha^2}{4(\alpha^2-1)}>0,$$

adică $\alpha\in(0,1)\cup(2,+\infty)$. Din faptul că $t>1$ și $2t-\alpha^2\geq 0$, deducem $\alpha^2<2$, deci $\alpha\in(0,1)$.

Reciproc, pentru orice $\alpha\in(0,1)$, relația (7) are loc. Aceasta arată că

$$Im\ f_1=(0,1).$$

Rezultă acum ușor că $Im\ f=(-1,1)$.

Problema 7. Fie $a\in\mathbb{R}, a\geq 2$. Determinați $Im\ f$ pentru

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{x^2+a}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Soluție. Fie $\alpha\in Im\ f$. Rezultă că există $x\in\mathbb{R}$ astfel încât

$$\alpha=\frac{x^2+a}{\sqrt{x^2+1}} \tag{8}$$

Notând $\sqrt{x^2+1}=t$ rezultă $t\geq 1$ și atunci afirmația de mai sus este echivalentă cu faptul că există $t\in[0,\infty)$ pentru care

$$\alpha=\frac{t^2+a-1}{t},$$

adică ecuația

$$t^2-\alpha t+a-1=0 \qquad (9)$$

are soluţii reale (cel puţin una dintre ele fiind situată în intervalul $[1,\infty)$).

Prin urmare discriminantul acestei ecuaţii $\Delta=\alpha^2-4(a-1)$ este pozitiv, ceea ce se realizează pentru

$$\alpha\in(-\infty,-2\sqrt{a-1}]\cup[2\sqrt{a-1},\infty).$$

Din relaţia (8) rezultă $\alpha>0$, astfel că obţinem soluţia

$$\alpha\in[2\sqrt{a-1},\infty),$$

care arată că

$$Im\ f\subset[2\sqrt{a-1},\infty). \qquad (10)$$

Reciproc, fie $\alpha\in[2\sqrt{a-1},\infty)$. Atunci $\Delta=\alpha^2-4a+4\geq 0$, deci ecuaţia (9) are rădăcini reale. În condiţiile date asupra lui a şi α, acuaţia (9) nu poate avea ambele rădăcini mai mici decât 1, căci în acest caz, parabola asociată funcţiei de gradul II

$$g(t)=t^2-\alpha t+a-1$$

ar avea abscisa vârfului mai mică strict decât 1, ceea ce ar conduce la concluzia că $x_v=\frac{\alpha}{2}=\sqrt{a-1}<1$, în contradicţie cu faptul că, din $a\geq 2$, avem întotdeauna $\sqrt{a-1}\geq 1$.

Prin urmare există $t\geq 1$, pentru care are loc (9), ceea ce înseamnă că există $x\in\mathbb{R}$ (dat prin $t=\sqrt{x^2+1}$) pentru care (8) este adevărată.

Aceasta demonstrează că $[2\sqrt{a-1},\infty)\subset Im\ f$, deci

$$Im\ f=[2\sqrt{a-1},\infty).$$

Observaţii. 1) Pentru $a=2$, problema 7 este tocmai prima problemă dată la Olimpiada de matematică, faza finală, 1976 (autor Şt.Kádár)

2) Soluţia dată în [4] problemei de la punctul 1) poate fi extinsă şi la cazul general al problemei 7. Putem scrie

$$f(x)=\frac{x^2+a}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{x^2+1+a-1}{\sqrt{x^2+1}}=\sqrt{x^2+1}+\frac{a-1}{\sqrt{x^2+1}},$$

şi folosind inegalitatea

$$u+\frac{a-1}{u}\geq 2\sqrt{a-1}$$

echivalentă cu

$$\left(\sqrt{u}-\sqrt{\frac{a-1}{u}}\right)^2\geq 0$$

şi care este valabilă pentru orice $u>0$ şi orice $a\geq 2$, deducem că

$$f(x)\geq 2\sqrt{a-1}\quad \forall x\in\mathbb{R},$$

care demonstrează tocmai incluziunea (10). Pentru a demonstra incluziunea inversă este suficient să arătăm că ecuaţia (8) are rădăcini reale, pentru orice $\alpha\in[2\sqrt{a-1},\infty)$, ceea ce am demonstrat anterior, prin intermediul substituţiei $t=\sqrt{x^2+1}$.

Recomandăm cititorului ca, după însuşirea metodei de lucru expusă mai înainte, să abordeze şi următoarele probleme propuse.

Problema 8. Determinaţi $Im\,f$ pentru $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\frac{x^2-2x+a}{\sqrt{x^2-2x+2}}\quad (a\geq 3).$$

Problema 9. Determinaţi imaginea funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x^2-2x+7}.$$

Problema 10. Aceeaşi cerinţă pentru $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=x-\sqrt{x^2-x+1}.$$

BIBLIOGRAFIE

1. ANDREI,GH., CARAGEA,C., CUCURUZEANU,I., BORDEA,Gh., Exerciții și probleme de algebră pentru concursuri și olimpiade școlare, partea I, Constanța, 1990

2. NĂSTĂSESCU,C., NIȚĂ,C., RIZESCU, Gh., Matematică. Algebră,Manual pentru clasa a IX-a, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1992

3. NĂSTĂSESCU,C., Exerciții și probleme de algebră, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1992

4. TOMESCU,I.(coord.), Probleme date la Olimpiadele de matematică pentru licee, Editura Științifică, București, 1992

ON SOME PROBLEMS CONCERNING THE DETERMINATION OF THE IMAGE OF A SET BY A FUNCTION

Abstract. The main goal of this paper is to illustrate an unitary method for solving a class of problems requiring the determination of the image of a given set by a real function.

A typical example is given by a contest problem (the final round of the Romanian Mathematical Olimpiad, 1993)

Problem 4. Let $f:\mathbb{R}\to[a,b]$, $f(x)=\dfrac{x+m}{x^2+x+1}$, $a,b\in Q$, $m\in\mathbb{Z}$.

Find a,b,m such that f is surjective.

Universitatea din Baia Mare
Str. Victoriei nr. 76, 4800 Baia Mare
ROMÂNIA