Lucrările Seminarului de
CREATIVITATE MATEMATICĂ
Vol.5 (1995-1996), 59-64

Dedicat Centenarului Gazetei Matematice (1895-1995)

ASUPRA UNEI PROBLEME DE TIP O.I.M.

Mihai BOLOŞ

În Gazeta Matematică nr. 8 (1995) la pagina 377 domnul profesor Bătineţu-Giurgiu propune problema O.G. 216 cu enunţul:

"Dacă $a,b,c<0$ şi $\frac{a+2b}{2a+3b+c}+\frac{b+2c}{2b+3c+a}+\frac{c+2a}{2c+3a+b}=\frac{3}{2}$,

atunci $a=b=c$."

Scopul acestei note este de a prezenta o soluţie elementară a problemei citate, o generalizare a problemei, precum şi o metodă de demonstrare a unei clase de inegalităţi.

Soluţia problemei. Relaţia din enunţ se mai scrie

$$\frac{a+2b}{a+2b+(a+b+c)}+\frac{b+2c}{b+2c+(a+b+c)}+\frac{c+2a}{c+2a+(a+b+c)}=\frac{3}{2}. \tag{1}$$

Notând $a+2b=x, b+2c=y, c+2a=z, a+b+c=s$, relaţia (1) se transcrie în forma echivalentă

$$\frac{x}{x+s}+\frac{y}{y+s}+\frac{z}{z+s}=\frac{3}{2}. \tag{2}$$

Deoarece $a,b,c>0$ rezultă că $x,y,z,s>0$ şi deci au loc inegalităţile

$$(3)\quad \frac{x}{x+s}\le\frac{x+s}{4s} \qquad (4)\quad \frac{y}{y+s}\le\frac{y+s}{4s} \qquad (5)\quad \frac{z}{z+s}\le\frac{z+s}{4s}.$$

Adunând membru cu membru inegalităţile (3),(4) şi (5) obţinem

$$\frac{x}{x+s}+\frac{y}{y+s}+\frac{z}{z+s}\le\frac{x+y+z+3s}{4s}. \tag{6}$$

Întrucât $x+y+z=3s$, din (6) se deduce că

$$\frac{x}{x+s}+\frac{y}{y+s}+\frac{z}{z+s}\le\frac{3}{2}. \tag{7}$$

Egalitatea în (7) are loc dacă şi numai dacă

$$\frac{x}{x+s}=\frac{x+s}{4s},\quad \frac{y}{y+s}=\frac{y+s}{4s},\quad \frac{z}{z+s}=\frac{z+s}{4s}.$$

Relaţiile precedente conduc la $x=y=z=s$ din care rezultă $a=b=c$.

Comentariu. Probabil că mai atrăgătoare pentru elevi ar fi fost următoarea formulare:

"Dacă între lungimile a,b,c ale laturilor unui triunghi are loc relaţia

$$\frac{a+2b}{2a+3b+c}+\frac{b+2c}{2b+3c+a}+\frac{c+2a}{2c+3a+b}=\frac{3}{2},$$

atunci triunghiul este echilateral."

Generalizarea problemei. Dacă $x_1,x_2,\dots,x_n,\ s>0$, $\sum_{i=1}^{n}x_i=ns$ şi $\frac{x_1}{x_1+s}+\frac{x_2}{x_2+s}+\dots+\frac{x_n}{x_n+s}=\frac{n}{2}$, atunci $x_1=x_2=\dots=x_n=s$.

Soluţie. Au loc inegalităţile: $\frac{x_i}{x_i+s}\le\frac{x_i+s}{4s}$ $(\forall)\ i=\overline{1,n}$, care, prin adunare membru cu membru, conduc la:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{x_i+s}\le\frac{1}{4s}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i+ns\right)=\frac{ns+ns}{4s}=\frac{n}{2}.$$

Egalitatea are loc dacă $x_1=x_2=\dots=x_n=s$.

Pentru $n=3$, $x_1=a+2b$, $x_2=b+2c$, $x_3=c+2a$, $s=a+b+c$ se regăseşte problema O.G. 216 din Gazeta Matematică Bucureşi nr. 8 (1995).

Se vor stabili în continuare două rezultate având consecinţe directe în stabilirea unei anumite clase de inegalităţi.

Propoziţia 1. Fie $n,\alpha,\beta,k,p,q\in\mathbb{N}$, $x_i,y_i>0$ $(\forall)\ i=\overline{1,n}$, $s>0$. Dacă sunt îndeplinite condiţiile

$$\sum_{i=1}^{n} x_i=\alpha S,\ \sum_{i=1}^{n} y_i=\beta S,\quad ky_i-qx_i=ps,\ (\forall)\ i=\overline{1,n}$$

atunci are loc inegalitatea

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{y_i}\le n\cdot\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\sum_{i=1}^{n}y_i}\ . \tag{8}$$

Demonstrație. Din $ky_i-q\cdot x_i=ps,\ (\forall)\ i=\overline{1,n}$ rezultă că $x_i=\frac{k}{q}y_i-\frac{p}{q}s,\ (\forall)\ i=\overline{1,n}$.

Atunci

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{y_i}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\frac{k}{q}y_1-\frac{p}{q}s}{y_i}=n\cdot\frac{k}{q}-\frac{p}{g}\cdot s\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{y_i}\ .$$

Folosind acum binecunoscuta inegalitate $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{y_i}\ge\frac{n^2}{\sum_{i=1}^{n}y_i}$

obținem

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{y_i}\le\frac{kn}{q}-\frac{ps}{q}\cdot\frac{n^2}{\beta s}=\frac{n}{q}\cdot\frac{(\beta k-qn)\cdot s}{\beta\cdot s}\ .$$

Deoarece $\beta k-pn=q\alpha$, din inegalitatea precedentă rezultă că

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{y_i}\le\frac{n}{q}\cdot\frac{q\cdot\alpha\cdot s}{\beta\cdot s}=n\cdot\frac{\alpha\cdot s}{\beta\cdot s}=n\cdot\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\sum_{i=1}^{n}y_i}\ ,$$

deci (8) este demonstrată.

Propoziția 2. Fie $n,\alpha,\beta,k,p,q\in\mathbb{N}^*,x_i,y_i>0\ (\forall)\ i=\overline{1,n},s>0$.

Dacă sunt îndeplinite

$$\sum_{i=1}^{n} x_i=\alpha s,\ \sum_{i=1}^{n} y_i=\beta s,\ k\cdot y_i+q\cdot x_i=ps,\ (\forall)\ i=\overline{1,n},$$

atunci are loc inegalitatea

(9) $$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{y_i}\geq n\cdot\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\sum_{i=1}^{n}y_i}.$$

Demonstrație. Din condițiile enunțului obținem

(10) $$k\alpha+q\beta=pn$$

și

(11) $$x_i=\frac{ps-q\cdot y_i}{k},\ (\forall)\ i=\overline{1,n}.$$

Relațiile (10) și (11) conduc la egalitatea

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{y_i}=\sum_{i=1}^{n}\frac{ps-q\cdot y_i}{k\cdot y_i}=\frac{ps}{k}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{y_i}-\frac{qn}{k}.$$

Folosind din nou inegalitatea $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{y_i}\geq\frac{n^2}{\sum_{i=1}^{n}y_i}$, avem

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{y_i}\geq\frac{ps}{k}\cdot\frac{n^2}{\sum_{i=1}^{n}y_i}-\frac{qn}{k}=\frac{ps}{k}\cdot\frac{n^2}{\beta s}-\frac{q\cdot n}{k}=$$

$$=\frac{ns}{k}\cdot\frac{(np-q\beta)}{\beta s}=\frac{n\cdot s\cdot k\cdot\alpha}{k\cdot\beta\cdot s}=n\cdot\frac{\alpha s}{\beta s}=n\cdot\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\sum_{i=1}^{n}y_i},$$

deci (9) este demonstrată.

Propozițiile 1 și 2 conduc la demonstrarea imediată a următoarelor inegalități:

1) Dacă $a,b,c>0$, atunci $\frac{a+2b}{2a+3b+c}+\frac{b+2c}{2b+3c+a}+\frac{c+2a}{2c+3a+b}\leq\frac{3}{2}$.

2) Fie $m,n\in\mathbb{N}^*$ și $x_1,x_2,\ldots,x_n\in\mathbb{R}_+^*$. Să se arate că

$$\frac{x_1}{mx_1+x_2+\ldots+x_n}+\frac{x_2}{x_1+mx_2+\ldots+x_n}+\ldots+\frac{x_n}{x_1+x_2+\ldots+mx_n}\leq\frac{n}{m+n-1}.$$

(Titu Zvonaru, G.M. nr.1, 1993)

3) Să se arate că oricare ar fi $x,y,z>0$, are loc inegalitatea

$$\frac{x}{x+2y+2z}+\frac{y}{y+2z+2x}+\frac{z}{z+2x+2y}\geq\frac{3}{5}.$$

(I.Pătraşcu, C.Preda)

4) Pentru orice $a,b,c,d>0$ are loc inegalitatea

$$\frac{a+b}{c+d}+\frac{b+c}{d+a}+\frac{c+d}{a+b}+\frac{d+a}{b+c}\geq 4.$$

5) Dacă $a,b,c,d>0$, să se găsească valoarea minimă a sumei

$$S=\frac{a}{b+c+d}+\frac{b}{c+d+a}+\frac{c}{d+a+b}+\frac{d}{a+b+c}+\frac{b+c+d}{a}+\frac{c+d+a}{b}+\frac{d+a+b}{c}+\frac{a+b+c}{d}.$$

6) Dacă $a,b,c\in\mathbb{R}^*$, are loc inegalitatea

$$\frac{a^2}{b^2+c^2}+\frac{b^2}{c^2+a^2}+\frac{c^2}{a^2+b^2}\geq\frac{3}{2}.$$

(Olimpiada R.D.G.)

7) Dacă $a,b,c>0$, are loc inegalitatea

$$\frac{(m-1)a+mb+(2m-1)c}{(m+1)a+mb+c}+\frac{(2m-1)a+(m-1)b+mc}{a+(m+1)b+mc}+\frac{ma+(2m-1)b+(m-1)c}{ma+b+(m+1)c}\geq$$
$$\geq\frac{3(2m-1)}{m+1}.$$

8) Dacă $a,b,c>0$, are loc inegalitatea

$$\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}\geq 6.$$

9) Dacă a,b,c sunt lungimile laturilor unui triunghi, are loc

$$\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c}\geq 3.$$

10) Dacă $a_1,a_2,\ldots,a_n\in\mathbb{R}_+^*$, are loc inegalitatea

$$\frac{a_1}{a_2+a_3+\ldots+a_n-a_1}+\frac{a_2}{a_3+a_4+\ldots+a_n+a_1-a_2}+\ldots+\frac{a_n}{a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}-a_n}\geq\frac{n}{n-2}.$$

BIBLIOGRAFIE

1. COCUZ,M., Culegere de probleme de matematică, Editura Academiei București, 1984
2. COȘNIȚĂ,C., TURTOIU,F., Probleme de algebră, Editura tehnică, București, 1989
3. MOROZOVA,E.A., PETRACOV,I.S., Olimpiadele internaționale de matematică, Editura tehnică, București, 1978
4. TEODORESCU,N. și colab., Probleme din Gazeta Matematică, Editura tehnică, București, 1984
5. * * * Colecția Gazetei Matematice din anii 1993-1995

ON A PROBLEM OF O.I.M. TYPE

Abstract. The author presents a solution of the problem O.G. 216 from Gazeta Matematică nr.8, 1995 and a general method for solving problems of this type. The main results of the note are the propositions 1 and 2. Some applications of this propositions are presented.

Gimnaziul "Nicolae Iorga"
4800 Baia Mare
ROMÂNIA