Lucrările Seminarului de
CREATIVITATE MATEMATICĂ
Vol.5 (1995-1996), 71-72

Dedicat Centenarului Gazetei Matematice (1895-1995)

UN SISTEM OMOGEN

Aurel HERŢEG

În cele ce urmează vom prezenta o soluţie la problema nr.11, pag. 67, Manualul de Algebră, clasa a XI-a, ediţia 1988. Această problemă a mai primit soluţii printre care amintim pe cea din revista Astra Matematică, vol.1, nr.2, p.25, autor Petru VLAD.

Să se rezolve sistemul (liniar şi omogen):

$$\begin{cases} ax+by+cz+dt=0 \\ bx-ay+dz-ct=0 \\ cx-dy-az+bt=0 \\ dx+cy-bz-at=0, \end{cases}$$

unde a,b,c,d sunt numere reale, cel puţin unul dintre ele fiind nenul.

Dăm în continuare soluţia problemei presupunând că a,b,c,d sunt fiecare numere reale diferite de zero şi folosind proprietăţile determinanţilor învăţate de elevi.

Avem

$$A=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & -a & d & -c \\ c & -d & -a & b \\ d & c & -b & -a \end{pmatrix}$$

$$\det A=\begin{vmatrix} a & b & c & d\\ b & -a & d & -c\\ c & -d & -a & b\\ d & c & -b & -a\end{vmatrix}=\frac{1}{abcd}\cdot\begin{vmatrix} a^2 & ab & ac & ad\\ b^2 & -ab & bd & -bc\\ c^2 & -cd & -ac & bc\\ d^2 & cd & -bd & -ad\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{abcd}\cdot\begin{vmatrix} a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 & 0 & 0\\ b^2 & -ab & bd & -bc\\ c^2 & -cd & -ac & bc\\ d^2 & cd & -bd & -ad\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{abcd}\cdot\begin{vmatrix} -ab & bd & -bc\\ -cd & -ac & bc\\ cd & -bd & -ad\end{vmatrix}=\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{a}\cdot\begin{vmatrix} -a & d & -c\\ -d & -a & b\\ c & -b & -a\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{a}\cdot(-a^3-bcd+bcd-ac^2-ab^2-ad^2)=$$

$$=(a^2+b^2+c^2+d^2)\cdot(-a^2-b^2-c^2-d^2)=-(a^2+b^2+c^2+d^2)^2\neq 0.$$

Deci, sistemul(1) admite numai soluţia banală.

Observaţii. 1. Prezentarea acestei soluţii s-a făcut cu scopul ca elevii să utilizeze în mod creator proprietăţile determinanţilor.

2. Determinantul matricii A se poate calcula şi observând că $A\,{}^tA=(a^2+b^2+c^2+d^2)^4\cdot I$ unde I este matricea unitate.

BIBLIOGRAFIE

1. Manual de algebră pentru clasa a XI-a, 1988. pag. 67
2. P.VLAD, Un sistem omogen, Astra Matematică, vol.1, nr. 2, aprilie 1990, p. 25

A LINEAR HOMOGENEOUS SYSTEM OF EQUATIONS

Abstract. In this note we solve a linear homogeneous system of equations by using the properties of the determinants in an ingenious way.

GRUPUL ŞCOLAR ELECTROMECANIC
BAIA MARE