Lucrările Seminarului de
CREATIVITATE MATEMATICĂ
Vol.5 (1995-1996), 73-80

Dedicat Centenarului Gazetei Matematice (1895-1995)

UNELE CARACTERIZĂRI ALE NUMERELOR PRIME

Lăcrimioara IANCU

De-a lungul anilor, în Gazeta Matematică au fost publicate multe şi frumoase probleme legate de numerele prime precum şi caracterizări ale acestora.

În continuare vom prezenta câteva dintre aceste rezultate şi probleme, adresând totodată cititorilor invitaţia de a descoperi în colecţia Gazetei Matematice şi altele, poate mai incitante decât acestea.

În Gazeta Matematică nr.2/1981, Florentin Smarandache, în articolul "Criterii ca un număr natural să fie prim" enunţă şi demonstrează următoarele:

C1) Fie $p\in\mathbb{N}$, $p\geq 3$. p este prim $\Leftrightarrow (p-3)!\equiv \frac{p-1}{2} \pmod p$

C2) Fie $m\in\mathbb{N}$, $m>4$. m nu este prim $\Leftrightarrow (m-1)!\equiv 0 \pmod m$

C3) Fie $p\in\mathbb{N}$, $p>4$. p este prim $\Leftrightarrow (p-4)!\equiv (-1)^{\left[\frac{p}{3}\right]+1}\cdot\left[\frac{p+1}{6}\right] \pmod p$

C4) Fie $p\in\mathbb{N}$, $p\geq 5$. p este prim $\Leftrightarrow (p-5)!\equiv rh+\frac{r^2-1}{24} \pmod p$, unde

$$h=\left[\frac{p}{24}\right] \text{ iar } r=p-24h$$

C5) Fie $p=(k-1)!h\pm 1$ cu $k>2, k\in\mathbb{N}^*$. p este prim $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (p-k)!\equiv(-1)^{k+\left[\frac{p}{h}\right]+1}\cdot h \pmod p$$

În Gazeta Matematică 7/1984 găsim următoarea problemă.

C6) Fie $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$. n este prim $\Leftrightarrow \varphi(n), n, \sigma(n)$ sunt în progresie aritmetică

(O:412, Ciprian Neacşu)

În Gazeta Matematică 8-9/1990, Aurel Sabo în articolul "Asupra celui mai mare divizor comun a două numere naturale" enunţă şi demonstrează că

C7) Un număr natural $p\geq 3$ este prim $\Leftrightarrow \sum_{i=2}^{p-1}\sum_{j=2}^{p-1}\left[\frac{ij}{p}\right]=\frac{(p-1)^2(p-2)}{4}$.

În Gazeta Matematică 12/1993 apare următorul enunţ:

C8) Fie $M=\{n\in\mathbb{N}^*|x^n=x,\ \forall x\in Z_n\}$ şi P mulţimea numerelor prime pozitive.Atunci

a.) $P\subset M$ şi $M\setminus P\neq\emptyset$

b.)Dacă $n\in M$ avem: $n\in P\Leftrightarrow\exists(x_1,x_2,...,x_n)\in Z_n^{n-1}xZ_n^*$ astfel încât

$$\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{2} & \dots & \widehat{n-2} & \widehat{n-1} \\ \hat{1} & \hat{2}^2 & \dots & \widehat{(n-2)^2} & \widehat{(n-1)^2} \\ . & . & . & . & . \\ \hat{1} & \hat{2}^{n-1} & \dots & \widehat{(n-2)^{n-1}} & \widehat{(n-1)^{n-1}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \dots \\ \hat{x}_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \hat{x}_n \\ \hat{0} \\ \dots \\ \hat{0} \end{pmatrix}.$$

(C:1477,Bogdan Georgescu)

În Gazeta Matematică 11/1982 găsim următorul enunţ aparţinând lui Marcel Ţena:

C9) Un număr natural $n\geq 2$ este o putere a unui număr prim $\Leftrightarrow n$ se divide cu $n-\varphi(n)$.

Implicaţia directă se demonsrează imediat,ţinând seama de faptul că $\varphi(p^k)=p^{k-1}(p-1)$.

Invers,dacă presupunem că n se divide cu $n-\varphi(n)\Rightarrow\exists\, t\in\mathbb{N},\ t\geq 2$ a.,î.

$n=t(n-\varphi(n))$, adică $t\varphi(n)=(t-1)n$. (1)

Fie $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_k^{\alpha_k}$, unde $p_1<p_2<\dots<p_k$ sunt numere prime, iar $\alpha_i\in\mathbb{N}^*$.

Presupunem că avem $k\geq 2$ şi inlocuim în relaţia (1); obţinem relaţia

$$t_{p_1}^{\alpha_1-1}p_2^{\alpha_2-1}\dots p_k^{\alpha_k-1}(p_1-1)\dots(p_k-1)=(t-1)p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_k^{\alpha_k}, \qquad (2)$$

de unde rezultă că $t(p_1-1)(p_2-1)\dots(p_k-1)=(t-1)p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_k^{\alpha_k}$. Deci p_k divide cel puţin unul din numerele $t,p_1-1,p_2-1,\dots p_k-1$, prin urmare p_k divide pe t (întrucât $p_1<p_2<\dots<p_k$). Deci

$\exists u\in\mathbb{N}^*$ a.î. $t=up_k$. (3)

Relaţia (2) se poate scrie şi astfel: $\frac{t}{t-1}=\frac{p_1}{p_1-1}\cdot\frac{p_2}{p_2-1}\dots\frac{p_k}{p_k-1}$,

adică

$$1+\frac{1}{t-1}=\left(1+\frac{1}{p_1-1}\right)\left(1+\frac{1}{p_2-1}\right)\dots\left(1+\frac{1}{p_k-1}\right)>\left(1+\frac{1}{p_k-1}\right)^k\geq 1+\frac{k}{p_k-1}.$$

Deci $\frac{1}{t-1}>\frac{k}{p_k-1}$, adică $p_k-1>kt-k$, de unde, pe baza lui (3), rezultă că

$k-1>p_k(ku-1)$ adică $p_k<\frac{k-1}{ku-1}\leq 1$, contradicţie. În concluzie k nu poate fi mai mare decât 2, adică avem $k=1; n=p^\alpha$.

Şi acum, câteva probleme legate de numere prime:

P1) Fie n un număr întreg pozitiv, $n>1$.

a) dacă 2^n+n^2 este un număr prim, atunci $n\equiv 3 \pmod 6$

b) să se cerceteze reciproca.

(O:306, Gazeta Matematică 5/1982)

Soluţie.

a) dacă 2^n+n^2 este prim, atunci n este impar prin urmare $n\equiv 1,3$ *sau* $5 \pmod 6$. Dacă $n\equiv 1 \pmod 6$ atunci $n^2\equiv 1 \pmod 6$ şi $2^n\equiv 2 \pmod 6$, deci $2^n+n^2\equiv 3 \pmod 6$, adică $3|2^n+n^2$, contradicţie întrucât 2^n+n^2 este prim şi strict mai mare decât 3.

Dacă $n\equiv 5 \pmod 6$ atunci $n^2\equiv 1 \pmod 6$ şi $2^n\equiv 2 \pmod 6$; din nou $2^n+n^2\equiv 3 \pmod 6$, contradicţie.

Singurul caz posibil rămâne $n\equiv 3 \pmod 6$.

b) reciproca nu este adevărată. De exemplu pentru $n=93$ numărul $2^{93}+93^2$ este multiplu de 11. Într-adevăr, pe baza teoremei lui Fermat, avem că $2^{10}\equiv 1 \pmod{11}$ şi deci: $2^{93}+93^2\equiv 2^3+5^2\equiv 0 \pmod{11}$.

P2) Să se demonstreze că numărul $N=\frac{5\cdot 2^{39}-1}{3}$ este natural dar nu este prim.

(Mihai Giurcan, O:722, Gazeta Matematică 7-8/1993)

Soluţie. $2^{39}\equiv 2 \pmod 3 \Rightarrow 5\cdot 2^{39}-1\equiv 0 \pmod 3 \Rightarrow N\in\mathbb{N}$.

În plus $2^{12}\equiv 1 \pmod{13}$ prin urmare $2^{39}\equiv 8 \pmod{13}$, deci $5\cdot 2^{39}-1\equiv 0 \pmod{13}$, deci N este multiplu de 13.

P3) Să se determine pătratele perfecte de forma 4^p+q^2, unde p/q sunt prime.

(N.Papacu, O:325, Gazeta Matematică 8/1982)

Soluţie. Dacă $q=2$ şi 4^p+4 este pătrat perfect $\Rightarrow 4(4^{p-1}+1)$ este pătrat perfect $\Rightarrow 4^{p-1}+1$ este pătrat perfect -imposibil.

Dacă $p=2$ şi $16+q^2$ este pătrat perfect avem deci că $\exists a\in\mathbb{N}$ astfel încât $16+q^2=a^2$, adică $16=a^2-q^2 \Rightarrow (a-q)(a+q)=16$. Pot avea loc următoarele situaţii: $a-q=1$, $a+q=16$ imposibil; $a-q=2$, $a+q=8\Rightarrow a=5$, $q=3$; $a-q=4$, $a+q=4$ imposibil. Deci $p=2, q=3$ este o soluţie a problemei.

Dacă $p>2, q>2$ şi 4^p+q^2 este pătrat perfect $\Rightarrow \exists a\in\mathbb{N}$ astfel încât $4^p+q^2=a^2$, adică $2^{2p}=(a-q)(a+q)$. Rezultă că $a-q=2^\alpha, a+q=2^\beta$, cu

$1 \le \alpha \le \beta$ şi $\alpha+\beta=2p$. Rezultă că $q=2^{\beta-1}-2^{\alpha-1}$ care este număr par întotdeauna cu excepţia situaţiei $\alpha=1$.

Dacă $\alpha=1$ avem $a-q=2, a+q=2^{2p-1} \Rightarrow q=4^{p-1}-1$ care este multiplu de 3.

Deci singura soluţie a problemei este $p=2, q=3$.

P4) Să se arate că pentru $\forall n\in\mathbb{N}, n\ge 2$, numărul $4^{n^2}+33^{n^2-1}$ este un număr compus.

(L.Panaitopol, C.449, Gazeta Matematică 11/1984)

Soluţie. Dacă n este impar, $n=2k+1$ atunci $4^{n^2}+33^{n^2-1}$ este multiplu de 5; într-adevăr

$$4^{4k^2+4k+1}+33^{4k^2+4k} \equiv (-1)^{4k^2+4k+1}+(-2)^{4k^2+4k} \equiv -1+16^{k^2+k} \equiv -1+1 \equiv 0 \pmod 5$$

Dacă n este par, $n=2k$ atunci numărul $4^{n^2}+33^{n^2-1}$ este multiplu de 17; într-adevăr

$$4^{4k^2}+33^{4k^2-1} \equiv (-1)^{2k^2}+16^{4k^2-1} \equiv (-1)^{2k^2}+(-1)^{2k^2-1} \equiv 1-1 \equiv 0 \pmod{17}$$

P5) Fie p un număr prim impar şi $q_1, q_2, \ldots, q_{p-1}$ numere prime astfel încât $q_1^{p-1}+2q_2^{p-1}+3q_3^{p-1}+\ldots+(p-1)q_{p-1}^{p-1}$ este prim. Arătaţi că cel puţin unul dintre numerele $q_1, q_2, \ldots, q_{p-1}$ este egal cu p.

(Florin Rotaru, C:1446, Gazeta Matematică 10/1993)

Soluţie. Dacă $p \notin \{q_1, q_2, \ldots, q_{p-1}\}$ atunci $q_i^{p-1} \equiv 1 \pmod p$ pentru fiecare $i \in \{1, \ldots, p-1\}$. Prin urmare numărul

$$N=q_1^{p-1}+2q_2^{p-1}+\ldots+(p-1)q_{p-1}^{p-1} \equiv 1+2+\ldots+(p-1)=\frac{p(p-1)}{2} \pmod p.$$

Dar $\frac{p(p-1)}{2} \equiv 0 \pmod p$. Deci $p|N$ şi prin urmare N nu este prim, contradicţie.

P6) Fie p un număr prim. Să se arate că o condiţie necesară şi suficientă ca ecuaţia în $n: \varphi(n)=2p$ să admită soluţie este ca $2p+1$ să fie prim.

(Ciprian Neacşu,O:390,Gazeta Matematică 12/1983)

Soluţie. Fie $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_k^{\alpha_k}$ cu $p_1<p_2<...<p_k$ numere prime $\alpha_i\geq 1, \alpha_i\in\mathbb{N}, i=\overline{1,k}$.

Atunci $\varphi(n)=p_1^{\alpha_1-1}p_2^{\alpha_2-1}...p_k^{\alpha_k-1}(p_1-1)(p_2-1)...(p_k-1)$; acest produs are cel puţin $k-1$ factori numere naturale mai mari strict decât 1. Prin urmare ecuaţia $\varphi(n)=2p$ are soluţie doar dacă $k\leq 3$.

Dacă $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}p_3^{\alpha_3}$, atunci $\varphi(n)=p_1^{\alpha_1-1}p_3^{\alpha_2-1}p_2^{\alpha_3-1}(p_1-1)(p_2-1)(p_3-1)$,

dacă $p_i^{\alpha_i-1}=p$, atunci $(p-1)$ trebuie să apară ca un factor în $\varphi(n)\Rightarrow p-1=1$ sau $p-1=2$. Dacă $p-1=1\Rightarrow p_2-1>1$, $p_3-1>1$ contradicţie; dacă $p-1=2\Rightarrow p_3-1>2$ din nou contradicţie (avem $\varphi(n)>2p$)

Mai rămâne varianta $p_i-1=p\Rightarrow p_i=p+1$, adică $p+1$ este prim;prin urmare $p=2$ şi deci: $p_1-1=1$ şi $p_3-1=1$ contradicţie(am presupus $p_1<p_2<p_3$)

Prin urmare ecuaţia $\varphi(n)=2p$ are soluţie dacă şi numai dacă $k\leq 2$.

Dacă $n=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}$ atunci $\varphi(n)=p_1^{\alpha_1-1}p_2^{\alpha_2-1}(p_1-1)(p_2-1)$. Avem următoarele posibilităţi:

$p_1^{\alpha_1-1}=1$, $p_2^{\alpha_2-1}=1$, $p_1-1=2, p_2-1=p$ imposibil

$p_1^{\alpha_1-1}=1$, $p_2^{\alpha_2-1}=p$, $p_1-1=2$, $p_2-1=1=p-1\Rightarrow p_1=3, p_2=2$ contradicţie

$p_1^{\alpha_1-1}=1$, $p_2^{\alpha_2-1}=p, p_1-1=1$, $p_2-1=2=p-1\Rightarrow p_1=2, p_2=3, p=3$

în această situaţie $\alpha_1=1$ $\alpha_2=2$

$n=2\cdot 3^2=18$ şi într-adevăr $2p+1$ este număr prim;

$p_1^{\alpha_1-1}=p$, $p_2^{\alpha_2-1}=1$, $p_1-1=1=p-1$, $p_2-1=2\Rightarrow p_1=p=2$, $p_2=3, \alpha_1=2$, $\alpha_2=1$

în această situaţie $n=2^2\cdot 3=12$ şi într-adevăr $2p+1$ este număr prim

$p_1^{\alpha_1-1}=1,\ p_2^{\alpha_2-1}=1,\ p_1-1=1,\ p_2-1=2p \Rightarrow \alpha_1=1,\ \alpha_2=1,\ p_1=2,\ p_2=2p+1$

dacă $2p+1$ este număr prim atunci şi numărul $n=2(2p+1)$ este soluţie a ecuaţiei considerate.

Mai rămâne de studiat situaţia în care n este putere a unui număr prim: $n=p_1^{\alpha_1}$; atunci $\varphi(n)=p_1^{\alpha_1-1}(p_1-1)$; $\varphi(n)=2p \Leftrightarrow p_1^{\alpha_1-1}=2,\ p_1-1=p$ sau $p_1^{\alpha_1-1}=p,\ p_1-1=2$ sau $p_1^{\alpha_1-1}=1,\ p_1-1=2p$.

Deci $\varphi(n)=2p$ $\Leftrightarrow$ I $p_1=2,\ \alpha_1=2,\ p=1$ imposibil

sau

II $p_1=p,\ \alpha_1=2,\ p_1=3$, deci $n=9,\ p=3$ (şi în această situaţie $2p+1$ este număr prim)

sau

III $\alpha_1=1,\ p_1=2p+1$ deci $n=2p+1$ dacă $2p+1$ este prim

În concluzie ecuaţia $\varphi(n)=2p$ are soluţie dacă şi numai dacă $2p+1$ este prim.

În continuare propunem cititorului spre rezolvare următoarele probleme reînnoind invitaţia de a descoperi şi altele în colecţia Gazetei Matematice:

P7) 101 este număr prim.Există şi alte numere de forma 10101...101 care să fie prime?

(Gazeta Matematică 1/1990)

P8) Să se determine numerele naturale n pentru care $[n \lg p_n]=n$ unde p_n este al n-lea număr prim iar $[a]$ este partea întreagă a numărului a.

(Ionel Tudor,22027,Gazeta Matematică 2/1990)

P9) Să se determine numărul prim p şi numerele naturale x,y,n astfel încât $(2p+1)(x^n+y^n)=(p+1)(x^{n+1}+y^{n+1})$

(Daniel Lesnic,O:615,Gazeta Matematică 3/1990)

În încheiere să remarcăm că, în general,caracterizările numerelor prime enunţate anterior sunt destul de rar operante în problemele uzuale, acestea rezolvându-se mai degrabă cu ajutorul definiţiei numerelor prime sau cu ajutorul teoremelor lui Fermat şi Euler.

BIBLIOGRAFIE

1. Gazeta Matematică, Colecţia 1976-1994

SOME CHARACTERIZATIONS OF PRIME NUMBERS

Abstract. In the paper some characterizations of prime numbers are presented, together with some problems concerning prime numbers which have appeared in "Gazeta Matematică".

Universitatea din Baia Mare
Str. Victoriei nr. 76, 4800 Baia Mare
ROMÂNIA