Lucrările Seminarului de
CREATIVITATE MATEMATICĂ
Vol.5 (1995-1996), 87-90

Dedicat Centenarului Gazetei Matematice (1895-1995)

ASUPRA UNOR LIMITE

Nicolae MUŞUROIA

În Gazeta Matematică nr.8 din 1994 [1], profesorul Ilie Iliescu rezolvă, fără a folosi regula lui L'Hospital, limita:

$$\lim_{x\to a}\frac{x^{x^x}-a^{a^a}}{x-a},\ a>0,\ x>0.$$

Limite de acest tip se întâlnesc şi în alte culegeri, de exemplu în [2] limitele 34, 35, 36, 37, pag.63 sunt

$$\lim_{x\to a}\frac{x^x-a^a}{x-a};\ \lim_{x\to a}\frac{a^{a^x}-a^{a^a}}{x-a}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{a^{x^x}-a^{a^a}}{x-a};\ \lim_{x\to a}\frac{a^{x^a}-a^{a^a}}{x-a}.$$

Atât în [1] cât şi în [2] soluţiile prezentate sunt destul de laborioase şi folosesc un artificiu mai puţin riguros, al limitei duble de tipul: $\lim\limits_{\substack{y\to 0\\ x\to a}} f(x,y)$.

Prezentăm o metodă care înlătură neajunsurile de mai sus, permite rezolvarea unitară a limitelor de acest tip, precum şi a generalizărilor acestora.

Fie
$$L_N=\lim_{x\to a}\frac{x^{x^{\cdot^{\cdot^{x}}}}-a^{a^{\cdot^{\cdot^{a}}}}}{x-a},$$

unde la numărător x, respectiv a apar de n ori, $n\in\mathbb{N}^*$.

Notăm $x(n)=x^{x^{\cdot^{\cdot^{x}}}}$ (x apare de n ori) şi cu $P(n)$ propoziţia

$$P(n):(\exists)\ L_n=\lim_{x\to a}\frac{x(n)-a(n)}{x-a};\ n\in\mathbb{N}^*.$$

Vom demonstra prin inducţie că $P(n)$ este o propoziţie adevărată şi vom stabili o relaţie de recurenţă pentru L_n.

Evident $P(1)$ este adevărată şi presupunând $P(k)$ adevărată pentru un număr $k\in\mathbb{N}^*$, arătăm că $P(k+1)$ este adevărată.

Avem

$$L_{k+1}=\lim_{x\to a}\frac{x_{(k+1)}-a_{k+1}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{e^{x(k)\ln x}-e^{a(k)\ln a}}{x-a}=$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{e^{a(k)\ln a}[e^{x(k)\ln x-a(k)\ln a}-1]}{x-a}=$$

$$=a(k+1)\lim_{x\to a}\frac{e^{x(k)\ln x-a(k)\ln a}-1}{x(k)\ln x-a(k)\ln a}\cdot\frac{x(k)\ln x-a(k)\ln a}{x-a}=$$

$$=a(k+1)\lim_{x\to a}\frac{e^{x(k)\ln x-a(k)\ln a}-1}{x(k)\ln x-a(k)\ln a}\left[x(k)\frac{\ln x-\ln a}{x-a}+\ln a\frac{x(k)-a(k)}{x-a}\right].$$

Folosind ipoteza de inducţie precum şi limitele cunoscute

$$\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}=1;\ \lim_{x\to a}\frac{\ln x-\ln a}{x-a}=\frac{1}{a}$$

obţinem că $P(k+1)$ este adevărată, adică $(\exists) L_{k+1}$, şi

$$L_{k+1}=a(k+1)\left[a(k)\cdot\frac{1}{a}+L_k\cdot \ln a\right].$$

Deci pe baza principiului inducţiei matematice, $(\exists) L_n$ $(\forall) n\in\mathbb{N}^*$ şi

$$L_{n+1}=a(n+1)\left[a(n)\cdot\frac{1}{a}+L_n\cdot \ln a\right],\quad (\forall) n\in\mathbb{N}.$$

În caz particular pentru $n=2$ obţinem

$$L_3=a(3)\left[a(2)\cdot\frac{1}{a}+L_2\cdot \ln a\right]=a(3)\,a(2)\cdot\frac{1}{a}+a(3)\ln a\cdot L_2=$$

$$=a(3)\,a(2)\cdot\frac{1}{a}+a(3)\ln a\,[a(2)(1+\ln a)]=$$

$$=a(3)\,a(2)\left[\frac{1}{a}+\ln a+\ln^2 a\right],$$

adică

$$\lim_{x\to a}\frac{x^{x^x}-a^{a^a}}{x-a}=a^{a^a}\cdot a^a\left[\frac{1}{a}+\ln a+\ln^2 a\right].$$

BIBLIOGRAFIE

1. ILIESCU, I., Asupra unor limite, Gazeta Matematică nr. 8, 1994, pag. 344
2. NICOLESCU, C.P., Analiză matematică, Editura Albatros, Bucureşti, 1987

ABOUT SOME LIMITS

Abstract. Through this work we deduce a recurrent relation for the limit

$$L_n = \lim_{x \to a} \frac{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{x}}}}} - a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a}}}}}}{x-a}$$

where in the numerator "x" and "a" appear n times, $n \in \mathbb{N}^*$.

Colegiul Gheorghe Şincai
4800 Baia Mare
ROMÂNIA