Lucrările Seminarului de
CREATIVITATE MATEMATICĂ
Vol.5 (1995-1996), 91-102

Dedicat Centenarului Gazetei Matematice (1895-1995)

UN PUNCT ŞI O DREAPTĂ REMARCABILE DIN PLANUL UNUI TRIUNGHI

Nicolae OPREA

În lucrarea de faţă vom folosi notaţiile obişnuite dintr-un triunghi oarecare ABC.

Pentru demonstrarea unor teoreme din lucrare ne vom folosi de următoarele rezultate publicate în [1] şi în alte lucrări de specialitate.

Teorema 1. *Într-un triunghi oarecare ABC secanta EF, $E\in(AB)$, $F\in(AC)$ trece prin centrul cercului înscris I dacă şi numai dacă există relaţia*

$$b\cdot\frac{EB}{EA}+c\cdot\frac{FC}{FA}=a.$$

Teorema 2. *Dacă într-un triunghi oarecare ABC se duce o ceviană arbitrară AD, $D\in(BC)$ şi dacă o secantă oarecare intersectează pe (AB), (AC) şi (AD) în E,F respectiv K, atunci, există relaţia*

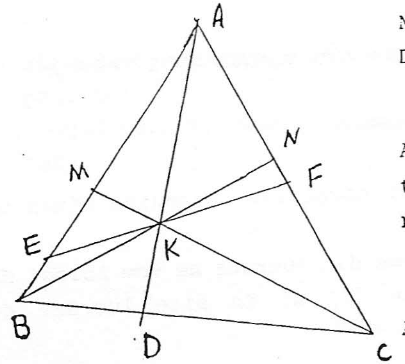
$$\frac{EB}{EA}\cdot DC+\frac{FC}{FA}\cdot BD=\frac{KD}{KA}\cdot BC.$$

În continuare vom demonstra următoarele rezultate:

Teorema 3. *Dacă într-un triunghi oarecare ABC cevienele BN şi CM sunt concurente într-un punct K, secanta EF, $E\in(AB)$, $F\in(AC)$ trece prin K dacă şi numai dacă există relaţia*

$$\frac{AM}{MB}\cdot\frac{EB}{EA}+\frac{AN}{NC}\cdot\frac{FC}{FA}=1.$$

Demonstrație. Presupunem că secanta EF trece prin punctul K.



Notăm $\{D\}=BC\cap AK$.

Din teorema 2 rezultă relația

$$\frac{EB}{EA}\cdot\frac{DC}{BC}\cdot\frac{KA}{KD}+\frac{FC}{FA}\cdot\frac{BD}{BC}\cdot\frac{KA}{KD}=1 \quad (1)$$

Aplicând teorema lui Menelaus triunghiului ABD cu transversala MC rezultă că

$$\frac{DC}{BC}\cdot\frac{KA}{KD}=\frac{AM}{MB} \quad (2)$$

Analog în triunghiul ADC avem relația

$$\frac{BD}{BC}\cdot\frac{KA}{KD}=\frac{AN}{NC}. \quad (3)$$

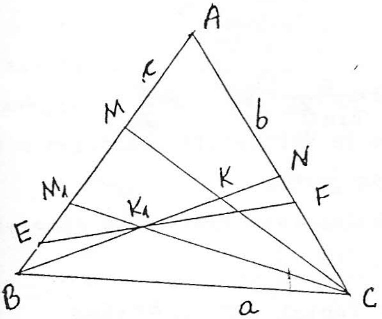
Din relațiile (1),(2) și (3) rezultă că

$$\frac{AM}{MB}\cdot\frac{EB}{EA}+\frac{AN}{NC}\cdot\frac{FC}{FA}=1.$$

Reciproc: Presupunem că avem relația

$$\frac{AM}{MB}\cdot\frac{EB}{EA}+\frac{AN}{NC}\cdot\frac{FC}{FA}=1, \quad (4)$$

și va trebui să demonstrăm că EF trece prin K.
Vom demonstra prin metoda reducerii la absurd.
Presupunem prin absurd că EF nu trece prin K. Notăm $\{K_1\}=EF\cap BN$, $K\neq K_1$ și fie $\{M_1\}=AB\cap CK_1$. Deoarece cevienele BN și CM_1 sunt concurente în K_1 și deoarece EF trece prin K_1, conform primei părți a acestei teoreme avem relația



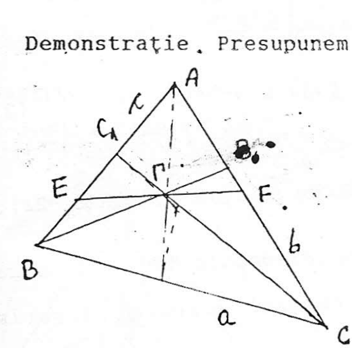
$$\frac{AM_1}{M_1B}\cdot\frac{EB}{EA}+\frac{AN}{NC}\cdot\frac{FC}{FA}=1.$$

Din această relaţie şi din relaţia (4) rezultă că $\frac{AM}{MB}=\frac{AM_1}{M_1B}$, ceea ce reprezintă o contradicţie (există numai un singur punct care să împartă segmentul (AB) într-un raport dat).

Teorema 4. *Dacă Γ este punctul lui Gergonne al unui triunghi oarecare ABC, secanta EF, $E\in(AB)$, $F\in(AC)$ trece prin Γ dacă şi numai dacă există relaţia*

$$\frac{EB}{EA}\cdot\frac{1}{p-b}+\frac{FC}{FA}\cdot\frac{1}{p-c}=\frac{1}{p-a}.$$

Demonstraţie. Presupunem că cercul înscris intersectează laturile (AC), (AB) în punctele B_1 respectiv C_1 şi fie BB_1, CC_1 ceviene care se intersectează în Γ. Dacă secanta EF trece prin Γ, conform teoremei 3 avem relaţia $\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{EB}{EA}+\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{FC}{FA}=1$.



Din această relaţie şi din relaţiile $AC_1=AB_1=p-a$, $BC_1=p-b$ şi $B_1C=p-c$ deducem că

$$\frac{EB}{EA}\cdot\frac{1}{p-b}+\frac{FC}{FA}\cdot\frac{1}{p-c}=\frac{1}{p-a}.$$

Lema 1. *Dacă I este centrul cercului înscris unui triunghi oarecare ABC, atunci avem relaţia*

$$AI^2=2R(h_a-2r).$$

Demonstraţie.Din relaţiile $AI=\frac{r}{\sin\frac{A}{2}}$ şi $r=\frac{S}{p}$ rezultă relaţia

$$AI=\frac{S}{p\sin\frac{A}{2}} \tag{1}$$

Pe de altă parte ţinând cont de faptul că $S=\frac{bc\sin A}{2}$ şi $\sin A=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$ din relaţia (1) rezultă că

$$AI=\frac{bc\cos\frac{A}{2}}{p}.$$

Din această relaţie şi din relaţia $\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$ obţinem că

$$AI^2=\frac{bc(p-a)}{p}. \tag{2}$$

Pe de altă parte, ţinând cont de faptul că

$bc=2Rh_a, p=\frac{S}{r}$ şi $a=\frac{2S}{h_a}$, din relaţia(2) deducem relaţia $AI^2=2R(h_a-2r)$.

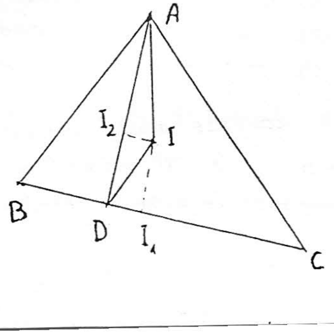
Lema 2. *Dacă într-un triunghi ascuţitunghic ABC se duce înălţimea* $AD=h_a$ $(D\in BC)$ *şi* I *este centrul cercului înscris, atunci există relaţia*

$$DI^2=(2R-h_a)(h_a-2r).$$

Demonstraţie.Fie I_1 şi I_2 proiecţiile punctului I pe BC, respectiv AD. Patrulaterul II_2DI_1 fiind un dreptunghi rezultă că $I_2D=II_1$, dar $II_1=r$, deci

$$I_2D=r. \tag{1}$$

Aplicând teorema lui Pitagora generalizată triunghiului ADI



rezultă că

$$DI^2=h_a^2+AI^2-2h_a(h_a-I_2D). \quad (2)$$

Din relaţiile (1) şi (2) şi din lema 1 rezultă că

$$DI^2=h_a^2+2R(h_a-2r)-2h_a(h_a-r),$$

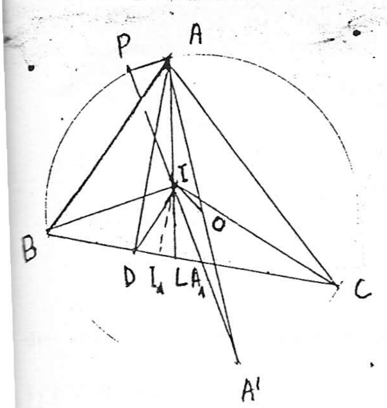
de unde după efectuarea calculelor obţinem că

$$DI^2=(2R-h_a)(h_a-2r).$$

Teorema 5. *Dacă într-un triunghi ascuţitunghic ABC se duce înălţimea $AD\,(D\in BC)$ şi dacă I este centrul cercului înscris, A' punctul diametral opus lui A de pe cercul circumscris, $\{A_1\}=BC\cap IA'$, atunci ID şi IA_1 sunt ceviene izogonale în triunghiul BIC.*

Demonstraţie. Notăm cu O centrul cercului circumscris triunghiului ABC, cu I_1 proiecţia lui I pe BC şi fie $\{L\}=BC\cap AI$ şi $\{P\}=C(O,R)\cap A'I$.

Din lema 1 rezultă că



$$\frac{BI^2}{CI^2}=\frac{2R(h_b-2r)}{2R(h_c-2r)},$$ de unde deducem că

$$\frac{BI^2}{CI^2}=\frac{h_b-2r}{h_c-2r}.$$

Din această relaţie, ţinând cont de relaţiile

$$h_b=\frac{2S}{b};\ h_c=\frac{2S}{c} \quad \text{şi} \quad r=\frac{S}{p}$$

rezultă relaţia

$$\frac{BI^2}{CI^2}=\frac{c}{b}\cdot\frac{p-b}{p-c}. \quad (1)$$

Pe de altă parte AL fiind bisectoare în triunghiul ABC, conform teoremei bisectoarei avem relaţia

$$\frac{BL}{LC}=\frac{c}{b} \quad . \tag{2}$$

Deoarece I_1, este proiecţia punctului I pe BC, rezultă că $BI_1=p-b$ şi $I_1C=p-c$, de unde rezultă relaţia

$$\frac{BI_1}{I_1C}=\frac{p-b}{p-c} \; .$$

Din ultima relaţie şi din relaţiile (1) şi (2) deducem că

$$\frac{BI^2}{CI^2}=\frac{BL}{LC}\cdot\frac{BI_1}{I_1C} \; ,$$

de unde conform teoremei lui Steiner rezultă că II_1 şi IL sunt ceviene izogonale în triunghiul BIC, deci

$$\widehat{BII_1}\equiv\widehat{CIL} \; . \tag{3}$$

Pe de altă parte, deoarece IO este mediană în triunghiul AIA' avem relaţia

$$IO^2=\frac{2(AI^2+IA'^2)-AA'^2}{4}$$

de unde deducem relaţia

$$IA'^2=\frac{4IO^2-AA'^2-2AI^2}{2} \; .$$

Din ultima relaţie şi din relaţiile

$IO^2=R(R-2r)$ (relaţia lui Euler)

$AA'=2R$, $AI^2=2R(h_a-2r)$ (lema 1), rezultă relaţia

$$IA'^2=2R(2R-h_a) \; . \tag{4}$$

Deoarece $\widehat{A'PA}=90^\circ$ (AA' fiind diametru în $C(O,R)$), rezultă că triunghiul IPA este dreptunghic în P.

Pe de altă parte, aplicând puterea punctului I față de $C(O,R)$ care este egală cu $2Rr$, rezultă că

$$IP\cdot IA'=2Rr.$$

Din ultima relație și din relația (4) deducem că

$$IP^2=\frac{2Rr^2}{2R-h_a},$$

de unde rezultă că

$$\frac{IP^2}{AI^2}=\frac{2Rr^2}{AI^2(2R-h_a)}. \qquad (5)$$

Din relația (5), lema 1, lema 2 și din faptul că $r=II_1$ deducem că

$$\frac{IP^2}{AI^2}=\frac{II_1^2}{DI^2},$$

de unde rezultă că

$$\frac{IP}{AI}=\frac{II_1}{DI}.$$

Din ultima relație rezultă că triunghiurile dreptunghice IDI_1 și IAP sunt asemenea. Din asemănarea acestor triunghiuri rezultă că

$\widehat{DII_1}\equiv\widehat{AIP}$, dar $\widehat{AIP}\equiv\widehat{A_1IL}$ (opuse la vârf), de unde deducem că

$$\widehat{DII_1}\equiv\widehat{A_1IL}. \qquad (6)$$

Din relațiile (3) și (6) rezultă că

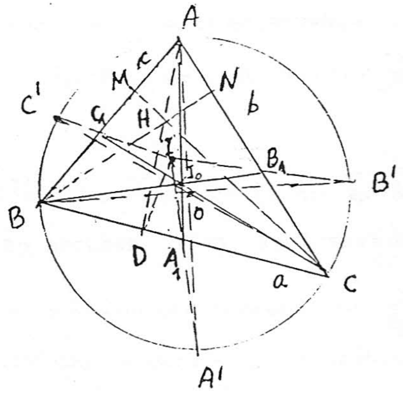
$$\widehat{BID}\equiv\widehat{CIA_1},$$

de unde rezultă că cevienele ID și IA_1 sunt izogonale în triunghiul BIC.

Teorema 6. Dacă I este centrul cercului înscris unui triunghi ascuțitunghic ABC și A',B',C' diametral opuse punctelor A,B,C de pe cercul circumscris și dacă $\{A_1\}=BC\cap IA'$, $\{B_1\}=AC\cap IB'$ și

$\{C_1\}=AB\cap IC'$, atunci cevienele AA_1, BB_1 şi CC_1 sunt concurente într-un punct pe care îl vom nota cu I_0.

Demonstraţie. În triunghiul ABC se duc înălţimile AD, BN şi CM concurente în H.



Din concurenţa înălţimilor, conform teoremei lui Ceva avem relaţia:

$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CN}{NA}\cdot\frac{AM}{MB}=1 \qquad (1)$$

Pe de altă parte, conform teoremei 5, în triunghiul BIC cevienele ID şi IA_1 sunt izogonale, de unde conform teoremei lui Steiner avem relaţia

$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{BI^2}{CI^2}.$$

Analog se obţin relaţiile:

$$\frac{CN}{NA}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{CI^2}{AI^2}$$

şi

$$\frac{AM}{MB}\cdot\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{AI^2}{BI^2}.$$

Înmulţind membru cu membru ultimele trei relaţii şi ţinând cont şi de relaţia (1) obţinem

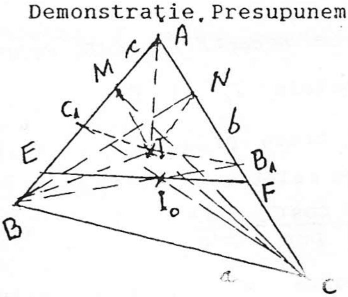
$$\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}\cdot\frac{AC_1}{C_1B}=1,$$

de unde conform reciprocei teoremei lui Ceva rezultă că cevienele AA_1, BB_1 şi CC_1 sunt concurente.

Teorema 7. *Într-un triunghi ascuţitunghic* ABC *secanta* EF, $E\in(AB)$, $F\in(AC)$ *trece prin punctul* I_0 *dacă şi numai dacă există relaţia*

$$\frac{EB}{EA}\cdot\frac{\cos B}{p-b}+\frac{FC}{FA}\cdot\frac{\cos C}{p-c}=\frac{\cos A}{p-a}.$$

Demonstraţie. Presupunem că secanta EF trece prin punctul



$\{I_o\}=BB_1\cap CC_1$, deci conform teoremei 3 avem relaţia

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{EB}{EA}+\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{FC}{FA}=1. \qquad (1)$$

Notăm cu $M\in(AB)$ şi $N\in(AC)$ picioarele înălţimilor triunghiului ABC coborâte din C respectiv B.
Conform teoremei 5, în triunghiul AIB cevienele IC_1 şi IM sunt izogonale, deci conform relaţiei lui Steiner avem

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{AM}{MB}=\frac{AI^2}{BI^2}.$$

Din această relaţie şi din relaţiile $AI=\dfrac{r}{\sin\frac{A}{2}}$, $BI=\dfrac{r}{\sin\frac{B}{2}}$,

$AM=c\cos A$, $BM=a\cos B$, $\sin^2\dfrac{B}{2}=\dfrac{(p-a)(p-c)}{ac}$ obţinem relaţia

$$\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{(p-a)\cos B}{(p-b)\cos A}. \qquad (2)$$

Analog se deduce relaţia

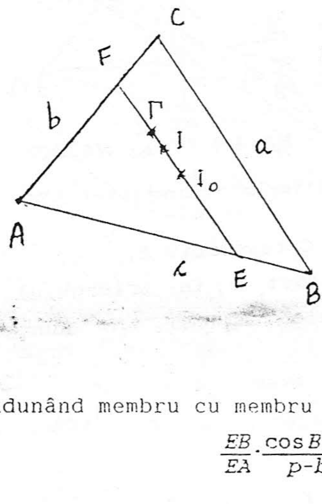
$$\frac{AB_1}{B_1C}=\frac{(p-a)\cos C}{(p-c)\cos A}. \qquad (3)$$

Din relaţiile (1), (2) şi (3) deducem că

$$\frac{EB}{EA}\cdot\frac{(p-a)\cos B}{(p-b)\cos A}+\frac{FC}{FA}\cdot\frac{(p-a)\cos C}{(p-c)\cos A}=1$$

Teorema 8. *Într-un triunghi ascuțitunghic ABC punctul lui Gergonne Γ, centrul cercului înscris I și punctul I_o sunt coliniare.*

Demonstrație.



Presupunem că o secantă EF, $E\in AB$, $F\in AC$ trece prin punctele I_o și Γ.

Deoarece EF trece prin I_o, conform teoremei 7 avem relația

$$\frac{EB}{EA}\cdot\frac{\cos B}{(p-b)}+\frac{FC}{FA}\cdot\frac{\cos C}{p-c}=\frac{\cos A}{p-a} \tag{1}$$

Pe de altă parte EF trece și prin punctul Γ, deci conform teoremei 4 avem relația

$$\frac{EB}{EA}\cdot\frac{1}{p-b}+\frac{FC}{FA}\cdot\frac{1}{p-c}=\frac{1}{p-a} \tag{2}$$

Adunând membru cu membru relațiile (1) și (2) obținem

$$\frac{EB}{EA}\cdot\frac{\cos B+1}{p-b}+\frac{FC}{FA}\cdot\frac{\cos C+1}{p-c}=\frac{\cos A+1}{p-a}.$$

Din această relație și din relațiile: $\cos B=2\cos^2\frac{B}{2}-1$,

$\cos C=2\cos^2\frac{C}{2}-1$ și $\cos A=2\cos^2\frac{A}{2}-1$ rezultă relația

$$\frac{EB}{EA}\cdot\frac{\cos^2\frac{B}{2}}{p-b}+\frac{FC}{FA}\cdot\frac{\cos^2\frac{C}{2}}{p-c}=\frac{\cos^2\frac{A}{2}}{p-a}. \tag{3}$$

Din relația (3) ținând cont de faptul că

$\cos^2\frac{B}{2}=\frac{p(p-b)}{ac}$, $\cos^2\frac{C}{2}=\frac{p(p-c)}{ab}$ și $\cos^2\frac{A}{2}=\frac{p(p-a)}{bc}$

deducem că

$$\frac{EB}{EA}\cdot\frac{1}{ac}+\frac{FC}{FA}\cdot\frac{1}{ab}=\frac{1}{bc}$$

de unde rezultă relația

$$\frac{EB}{EA}\cdot b+\frac{FC}{FA}\cdot c=a,$$

relație care conform teoremei 1 exprimă faptul că EF trece prin punctul I, adică punctele Γ, I și I_0 sunt coliniare.

BIBLIOGRAFIE

1.OPREA,N., Ceviene de rang K, Gazeta Matematică, 8, 1989
2.OPREA,N., Coliniaritatea unor puncte remarcabile, Gazeta Matematică 4,1991

A REMARKABLE POINT AND A REMARKABLE LINE IN THE PLANE OF A GIVEN TRIANGLE

Abstract. In this paper we construct in the plane of a given triangle a noteworthy point I_o, generated by the incentre and the excentre. Then, using an original method that we call "Secant method", we prove that this point I_o, Gergonne point Γ, and the incentre I are collinear.

Universitatea din Baia Mare
Str. Victoriei nr. 76, 4800 Baia Mare
ROMÂNIA