Lucrările Seminarului de
CREATIVITATE MATEMATICĂ
Vol.6 (1996-1997), 1-32

Dedicat celei de-a 35-a aniversări a Universității din Baia Mare

INEGALITĂȚI INTEGRALE*

Dan BĂRBOSU și Ioana ZELINA

Această lucrare are un caracter metodic și urmărește să prezinte unitar strategii de abordare a inegalităților integrale.

1. Inegalități integrale remarcabile.

1.1. Teoremă (Young) *Fie $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ continuă, strict crescătoare, cu $f(0)=0$. Atunci, $(\forall)\, a\in\mathbb{R}_+$ și $(\forall)\, b\in f(\mathbb{R}_+)$ are loc inegalitatea:*

$$a\cdot b\le\int_0^a f(x)\,dx+\int_0^b f^{-1}(y)\,dy \tag{1.1}$$

Demonstrație. Notăm

S_1 -porțiunea din plan delimitată de G_f, axa Ox și dreapta $x=a$

S_2 -porțiunea din plan delimitată de $G_{f^{-1}}$, axa Oy și dreapta $y=b$

Este evident că $a\cdot b\le aria\ S_1+aria\ S_2$ și cum $aria\ S_1=\int_0^a f(x)\,dx$, $aria\ S_2=\int_0^b f^{-1}(y)\,dy$ rezultă că are loc (1.1)

---

*) *Dedicăm această lucrare și apropiatei aniversări a 35 de ani a liceului "Vasile Lucaciu" din Baia Mare, a căror absolvenți avem onoarea a fi.*

Aplicaţie. Demonstraţi inegalitatea $\int_0^e(\sqrt{e^x-1}+\ln(x^2+1))\,dx\geq e^2$

Soluţie. Funcţia $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ $f(x)=\ln(x^2+1)$ este continuă strict crescătoare şi are proprietatea $f(0)=0$. Inversa ei este funcţia $f^{-1}:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$, $f^{-1}(x)=\sqrt{e^x-1}$. Aplicând inegalitatea lui Young cu $a=b=e$ se obţine inegalitatea enunţului.

1.2. Teoremă (Hölder)

i) Fie $a,b\in\mathbb{R}$ şi $p,q>0$ astfel încât $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Are loc inegalitatea

(1.2) $$|a\cdot b|\leq\frac{|a|^p}{p}+\frac{|b|^q}{q}.$$

ii) Fie $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ două funcţii integrabile Riemann şi $p,q>0$ astfel încât $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

Are loc inegalitate

(1.3) $$\int_a^b|f\cdot g|\leq\left(\int_a^b|f|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b|g|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Demonstraţie.

i) Înlocuind eventual a cu $|a|$ şi b cu $|b|$, putem presupune că $a\geq0$ şi $b\geq0$. Fie $\alpha>0$ fixat şi funcţia $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$, $f(x)=x^\alpha$.

Funcţia f este continuă, strict crescătoare şi $f(0)=0$. Aplicând atunci inegalitatea lui Young obţinem

$$a\cdot b\leq\int_0^a x^\alpha dx+\int_0^b y^{\frac{1}{\alpha}}dy=\frac{a^{\alpha+1}}{\alpha+1}+\frac{b^{\frac{1}{\alpha}+1}}{\frac{1}{\alpha}+1}$$

Cum $\frac{1}{p}<1$ şi $\frac{1}{q}<1$ rezultă că $p>1$ şi $q>1$. Prin urmare, pentru $\alpha=p-1$ avem $\frac{1}{\alpha}+1=\frac{1}{p-1}+1=\frac{p}{p-1}=q$. Atunci inegalitatea precedentă se reduce la inegalitatea

$$a\cdot b\le \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$$

care, în baza observației de la început, justifică inegalitatea enunțului.

ii) Dacă $\int_a^b |f|^p=0$ sau $\int_a^b |g|^q=0$ atunci $|f|=0$ a.p.t. sau $|g|=0$ a.p.t. și deci $\int_a^b |f\cdot g|=0$, adică inegalitatea este verificată cu egalitate.

Să presupunem atunci că $\int_a^b |f|^p>0$ și $\int_a^b |g|^q>0$ și să notăm

$$(1.4)\qquad \alpha=\frac{|f|}{\left(\int_a^b |f|^p\right)^{1/p}},\ \beta=\frac{|g|}{\left(\int_a^b |g|^q\right)^{1/q}}$$

Conform inegalității (1.2), cu α și β dați în (1.4), avem

$$\frac{|f|\cdot|g|}{\left(\int_a^b |f|^p\right)^{1/p}\left(\int_a^b |g|^q\right)^{1/q}}\le\frac{|f|^p}{p\int_a^b |f|^p}+\frac{|g|^q}{q\int_a^b |g|^q}$$

Integrând inegalitatea precedentă rezultă că

$$\frac{\int_a^b |f|\cdot|g|}{\left(\int_a^b |f|^p\right)^{1/p}\left(\int_a^b |g|^q\right)^{1/q}}\le\frac{1}{p\int_a^b |f|^p}\int_a^b |f|^p+\frac{1}{q\int_a^b |g|^q}\int_a^b |g|^q=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

care este echivalentă cu inegalitatea (1.3).

1.3. Consecință (Schwarz) *Dacă $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ sunt integrabile Riemann pe $[a,b]$, are loc inegalitatea*

$$(1.5)\qquad \left(\int_a^b |f\cdot g|\right)^2\le\left(\int_a^b |f|^2\right)\left(\int_a^b |g|^2\right)$$

Demonstrație. Se aplică inegalitatea lui Hölder cu $p=q=2$.

1.4. Consecință (Minkovski) *Dacă $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ sunt integrabile pe $[a,b]$ iar $p\ge1$, are loc inegalitatea*

$$(1.6)\qquad \left(\int_a^b |f+g|^p\right)^{1/p}\le\left(\int_a^b |f|^p\right)^{1/p}+\left(\int_a^b |g|^p\right)^{1/p}$$

Demonstraţie.

Dacă $p=1$ sau $\int_a^b |f+g|^p=0$, inegalitatea (1.6) este verificată cu egalitatea.

Să presupunem că $p>1$ şi $\int_a^b |f+g|>0$. Avem

(1.7) $$|f+g|^p=|f+g|\cdot|f+g|^{p-1}\le|f|\cdot|f+g|^{p-1}+|g|\cdot|f+g|^{p-1}$$

Fie $q>0$ astfel încât $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Rezultă atunci că $(p-1)q=p$.

Folosind (1.7) şi inegalitatea lui Hölder, obţinem

$$\int_a^b |f+g|^p\le\int_a^b |f|\cdot|f+g|^{p-1}+\int_a^b |g|\cdot|f+g|^{p-1}\le$$

$$\le\left(\int_a^b |f|^p\right)^{1/p}\cdot\left(\int_a^b |f+g|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\int_a^b |g|^p\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\int_a^b |f+g|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}=$$

$$=\left[\left(\int_a^b |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_a^b |g|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right]\left(\int_a^b |f+g|^p\right)^{\frac{1}{q}}$$

Împărţind prin $\left(\int_a^b |f+g|^p\right)^{\frac{1}{q}}$ se ajunge la

$$\left(\int_a^b |f+g|^p\right)^{1-\frac{1}{q}}\le\left(\int_a^b |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_a^b |g|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Datorită alegerii lui q, inegalitatea precedentă este echivalentă cu inegalitatea enunţului.

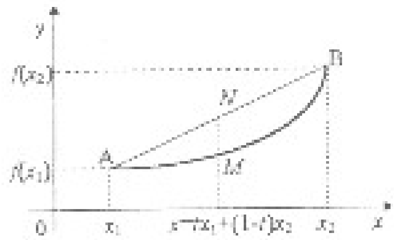
2. Inegalităţi integrale deduse din proprietatea de convexitate

2.1. Definiţia. Funcţia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ este convexă pe $[a,b]$ dacă $(\forall)\ x_1,x_2\in[a,b]$, $(\forall)\ t\in[0,1]$ are loc inegalitatea

(2.1) $$f(tx_1+(1-t)x_2)\le tf(x_1)+(1-t)f(x_2)$$

Dacă are loc contrara inegalităţii (2.1), funcţia f este concavă pe $[0,1]$.

2.2. Interpretare geometrică. Considerăm $x = tx_1 + (1-t)x_2 \in [x_1, x_2]$



Ordonata punctului M situat pe G_f care are abscisa x este:

$y_M = f(tx_1 + (1-t)x_2)$

Ordonata punctului N, de abscisă x, situat pe coarda AB, $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ este

$y_N = tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$

Din (2.1) rezultă că $y_M \leq y_N$, $(\forall) x_1, x_2 \in [a,b]$, $(\forall) t \in [0,1]$, ceea ce înseamnă graficul unei funcţii convexe pe un interval $[a,b]$ se găseşte dedesuptul coardei determinată de punctele $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$, $(\forall) x_1, x_2 \in [a,b]$.

Prezentăm în continuare două aplicaţii.

Aplicaţia 1. Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continuă şi convexă. Să se arate că au loc inegalităţile

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

Soluţie. Deoarece f este convexă pe $[a,b]$, graficul lui f este situat sub graficul segmentului AB, $A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$.

Deoarece $(G_f) : y = f(x)$, $x \in [a,b]$ şi

$(AB) : y = \dfrac{f(a)\cdot(b-x) + f(b)\cdot(x-a)}{b-a}$, $x \in [a,b]$, rezultă că are loc inegalitatea

$$f(x) \leq \frac{f(a)\cdot(b-x) + f(b)\cdot(x-a)}{b-a}, \quad (\forall) x \in [a,b]$$

Integrând inegalitatea precedentă între limitele a şi b, se obţine

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \frac{f(a)}{b-a}\int_a^b (b-x)\,dx + \frac{f(b)}{b-a}\int_a^b (x-a)\,dx = \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

deci inegalitatea din dreapta este demonstrată.

În integrala $\int_a^b f(x)\,dx$ se efectuează schimbarea de variabilă $t=x-\frac{a+b}{2}$ și se aplică definiția 2.1 cu $t=\frac{1}{2}$, obținându-se succesiv

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_{\frac{a-b}{2}}^{\frac{b-a}{2}} f\left(t+\frac{a+b}{2}\right)dt=\int_0^{\frac{b-a}{2}}\left[f\left(\frac{a+b}{2}+t\right)+f\left(\frac{a+b}{2}-t\right)\right]dt\geq$$

$$\geq 2\int_a^{\frac{b-a}{2}} f\left(\frac{a+b}{2}\right)dt=(b-a)\,f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

care este echivalentă cu inegalitatea din stânga.

Aplicația 2. Fie $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ integrabilă și convexă. Să se arate că

$$4\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)\,dx\leq f(1)+\int_0^1 f(x)\,dx$$

Soluție. Să observăm că

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{1}{2}+\frac{k}{2n}\right)$$

Deoarece f este convexă pe $[0,1]$, conform lui 2.1, cu $t=\frac{1}{2}$ are loc

$$f\left(\frac{1}{2}+\frac{k}{2n}\right)=f\left(\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot\frac{k}{n}\right)\leq\frac{1}{2}\left(f(1)+f\left(\frac{k}{n}\right)\right)$$

Din cele de mai sus rezultă că

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)\,dx\leq\frac{1}{4}f(1)+\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)=\frac{1}{4}f(1)+\frac{1}{4}\int_0^1 f(x)\,dx$$

adică $4\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)\,dx\leq f(1)-\int_0^1 f(x)\,dx$.

Este cunoscut rezultatul exprimat în următoarea

2.3. Propoziție. *Dacă* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *este convexă și derivabilă pe* $[a,b]$ *atunci*

i) funcția $x\to f'(x)$ *este crescătoare pe* $[a,b]$

ii) tangenta la graficul funcției f *în fiecare punct al graficului* este situată dedesubtul graficului.

Aplicația 3. Dacă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ este derivabilă și convexă pe $[a,b]$, au loc inegalitățile

$$\frac{b-a}{2}f'(a)\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx-f(a)\le\frac{b-a}{2}f'(b)$$

Soluție. Ecuația graficului lui f este $(G_f):y=f(x),\ x\in[a,b]$ iar ecuația tangentei la G_f în $A(a,f(a))$ este $(\Delta_A):y-f(a)=f'(a)(x-a),\ x\in[a,b]$. Aplicând propoziția 2.3., afirmația ii), rezultă că

$$f(a)+(x-a)f'(a)\le f(x),\quad (\forall)x\in[a,b]$$

iar de aici, prin integrare în limitele a și b, rezultă

$$f'(a)\int_a^b(x-a)\,dx\le\int_a^b f(x)\,dx-(b-a)f(a)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{(b-a)^2}{2}f'(a)\le\int_a^b f(x)\,dx-(b-a)f(a)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{b-a}{2}f'(a)\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx-f(a)$$

deci inegalitatea din stânga este demonstrată. Pentru a demonstra inegalitatea din dreapta, considerăm funcția $G:[a,b]\to\mathbb{R}$

$$G(t)=\frac{(b-t)^2}{2}f'(b)+(b-t)f(t)-\int_t^b f(x)\,dx$$

Funcția G este derivabilă pe $[a,b]$ și

$$G'(t)=-(b-t)f'(b)-f(t)+(b-t)f'(t)+f(t)=(b-t)(f'(t)-f'(b))$$

Cum $t<b$ și f' este crescătoare pe $[a,b]$ (conform propoziției 2.3., afirmația i)), rezultă că $G'(t)\le 0,\ (\forall)t\in[a,b]$. Rezultă deci că G este descrescătoare pe $[a,b]$ și atunci are loc inegalitatea

$$\frac{(b-a)^2}{2}f'(b)+(b-a)f(a)-\int_a^b f(x)\,dx\ge 0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx-f(a)<\frac{b-a}{2}f'(b)$$

Aplicaţia 4. Dacă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ este derivabilă şi convexă pe $[a,b]$, atunci $(\forall)x_0\in[a,b]$ are loc inegalitatea

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq (b-a)\left[f(x_0) + f'(x_0)\cdot\left(\frac{a+b}{2} - x_0 \right) \right]$$

Soluţie. Tangenta la graficul funcţiei f în $(x_0, f(x_0))$ se găseşte sub graficul lui f, $(\forall)x_0\in[a,b]$, prin urmare are loc inegalitatea

$$f(x)\geq f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0),\quad (\forall)x_0, x\in[a,b]$$

Integrând inegalitatea precedentă între limitele a şi b se obţine afirmaţia enunţului.

2.4. Propoziţie [11]. *Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ de două ori derivabilă pe $[a,b]$. Atunci*

i) *f este convexă pe $[a,b]\Leftrightarrow f''(x)\geq 0$, $(\forall)x\in[a,b]$*

ii) *f este concavă pe $[a,b]\Leftrightarrow f''(x)\leq 0$, $(\forall)x\in[a,b]$*

Aplicaţia 5. Dacă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este de două ori derivabilă şi convexă, atunci $(\forall)a,b\in\mathbb{R}_+$ are loc inegalitatea

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(t)\,dt + \frac{af(a)+bf(b)}{3} \geq \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(t)\,dt + \frac{a+b}{2}f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

Soluţie. Definim $h:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$, $h(x)=2\int_a^x f(t)\,dt - xf(x)$.

Evident h este derivabilă pe $[a,+\infty)$ şi

$$h'(x)=2(f(x)-f(a))-f(x)-xf'(x)=f(x)-2f(a)-xf'(x),\quad (\forall)x\in[a,+\infty)$$

Cum f este de două ori derivabilă, rezultă că h e de două ori derivabilă şi

$$h''(x)=f'(x)-f'(x)-xf''(x)=-xf''(x)\leq 0,\quad (\forall)x\in[a,+\infty)$$

căci f este convexă pe $[a,+\infty)$. Aplicând atunci definiţia 2.1. pentru funcţii concave cu $x_1=a$, $x_2=b$, $t=\frac{1}{2}$ rezultă că

$h\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \frac{h(a)+h(b)}{2}$, ceea ce înseamnă că

$$2\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(t)\,dt - \frac{a+b}{2} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \frac{1}{2}\left(2\int_a^a f(t)\,dt - af(a) + 2\int_a^b f(t)\,dt - bf(b)\right)$$

$$= -\frac{af(a)+bf(b)}{2} + \int_a^b f(t)\,dt = -\frac{af(a)+bf(b)}{2} + \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(t)\,dt + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(t)\,dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(t)\,dt + \frac{a\cdot f(a)+b\cdot f(b)}{2} \geq \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(t)\,dt + \frac{a+b}{2} f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

Aplicația 6. Dacă $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ este de două ori derivabilă cu $f''(x)\leq 0$, $(\forall)\, x\in[0,1]$, are loc inegalitatea

$$2\int_0^1 f\left(\frac{x+t}{2}\right)dx \geq \int_0^1 f(x)\,dx + f(t),\quad (\forall)\, t\in[0,1]$$

Soluție. Din ipoteză rezultă că f este concavă pe $[0,1]$ deci $(\forall)\, x,t\in[0,1]$ are loc inegalitatea

$$f\left(\frac{x+t}{2}\right) \geq \frac{f(x)+f(t)}{2},\quad (\forall)\, x,t\in[0,1]$$

care integrată în raport cu x conduce la inegalitatea enunțului.

2.5. Propoziție (Jensen). *Funcția $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ este convexă pe $[a,b]$ dacă și numai dacă pentru*

$(\forall)\, x_1,\ldots,x_n\in[a,b]$, $(\forall)\, t_1,\ldots,t_n\in[0,1]$, $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$ are loc

inegalitatea

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} t_i f(x_i) \tag{2.2}$$

Funcția considerată este concavă pe $[a,b]$ dacă și numai dacă, în condițiile precizate, au loc contrara inegalității (2.2).

Aplicația 7. Fie $f:[a,b]\to[c,d]$ integrabilă iar $g:[c,d]\to\mathbb{R}$ continuă și convexă. Are loc inegalitatea

$$g\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b (g\circ f)(x)\,dx$$

Soluţie. Cum f este integrabilă iar g este continuă, rezultă că $g \circ f$ este integrabilă. Atunci

$$(*) \qquad \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx$$

$$\begin{pmatrix}*\\*\end{pmatrix} \qquad \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (g \circ f)\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right) = \frac{1}{b-a}$$

Deoarece g este convexă, are loc inegalitatea

$$\begin{pmatrix}*\\*\\*\end{pmatrix} \qquad g\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right)\right) \le \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (g \circ f)\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right)$$

Trecem la limită în $\begin{pmatrix}*\\*\\*\end{pmatrix}$ şi folosind continuitatea lui g şi inegalităţile $(*)$ şi $\begin{pmatrix}*\\*\end{pmatrix}$ obţinem inegalitatea enunţului.

Aplicaţia 8. Fie $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ integrabilă. Are loc inegalitatea

$$e^{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx} \le \frac{1}{b-a} \int_a^b e^{f(x)}\, dx$$

Soluţie. Se foloseşte rezultatul stabilit în aplicaţia 7, cu $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = e^x$ care este continuă şi convexă.

2.6. Propoziţie. *Dacă $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ este derivabilă şi crescătoare pe $[a,b]$ iar $F:[a,b] \to \mathbb{R}$ este o primitivă a lui f, atunci F este convexă pe $[a,b]$.*

Demonstraţie. Avem $F'(x) = f(x)$, $(\forall) x \in [a,b]$. Cum f este derivabilă şi crescătoare pe $[a,b]$, din egalitatea pecedentă rezultă că F este de două ori derivabilă pe $[a,b]$ şi

$$F''(x) = f'(x) \ge 0, \quad (\forall) x \in [a,b].$$

Conform propoziţiei 2.4., funcţia F este convexă pe $[a,b]$.

Aplicația 9. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ derivabilă și crescătoare pe $\mathbb{R}$. Pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$, $(\forall)\lambda\in[0,1]$ are loc inegalitatea

$$\int_0^{\lambda x+(1-\lambda)y} f(t)\,dt \le \lambda \int_0^x f(t)\,dt + (1-\lambda)\int_0^y f(t)\,dt$$

Soluție. Din ipoteză rezultă că f este primitivabilă pe $\mathbb{R}$ iar dacă $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este o primitivă a lui f, atunci F este convexă. Rezultă deci că

$$\int_0^{\lambda x+(1-\lambda)y} f(t)\,dt = F(\lambda x+(1-\lambda)y) - F(0) \le \lambda F(x) + (1-\lambda)F(y) - F(0)$$

inegalitate echivalentă cu cea a enunțului.

3. Inegalități integrale deduse din proprietatea de monotonie

Vom prezenta mai întâi câteva inegalități integrale deduse din proprietatea de monotonie a unor funcții definite printr-o integrală.

Aplicația 1. Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, continuă, monoton descrescătoare. Atunci oricare ar fi $x\in(a,b)$ au loc inegalitățile

$$\frac{1}{b-x}\int_x^b f(t)\,dt \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt \le \frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)\,dt$$

Soluție. Considerăm funcția $G:[a,b)\to\mathbb{R}$, definită prin

$$G(x) = \frac{1}{b-x}\int_x^b f(t)\,dt - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$$

Evident G este derivabilă pe $[a,b)$ și

$$G'(x) = \frac{1}{(b-x)^2}\left(\int_x^b f(t)\,dt - (b-x)f(x)\right)$$

Cum f este continuă pe $[a,b]$, conform primei teoreme de medie a integralei definite rezultă că $(\exists)\, c_x\in(x,b)$ astfel încât

$$\int_x^b f(t)\,dt = (b-x)\,f(c_x)$$

Rezultă atunci că $G'(x)$ admite reprezentarea

$$G'(x) = \frac{1}{b-x}(f(c_x) - f(x)), \quad (\forall) x \in [a,b)$$

Deoarece f este monoton descrescătoare şi $x<b$, $c_x<x$ rezultă că $G'(x)<0$, $(\forall) x\in[a,b)$. Prin urmare, funcţia G este monoton descrescătoare pe $[a,b)$, ceea ce înseamnă că $G(x)<G(a)=0$, $(\forall) x\in[a,b)$. Inegalitate precedentă este echivalentă cu inegalitatea din stânga. Pentru inegalitatea din dreapta se procedează analog, folosind funcţia $H:(a,b]\to\mathbb{R}$, definită prin relaţia

$$H(x) = \frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)\,dt - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$$

Aplicaţia 2. Fie $F,G:[a,b]\to\mathbb{R}$ două funcţii continue, F pozitivă, derivabilă şi descrescătoare iar G cu proprietatea că $\int_a^x G(t)\,dt\geq 0$, $(\forall) x\in[a,b]$. Atunci, $(\forall) x\in[a,b]$ are loc inegalitatea

$$\int_a^x F(t)\,G(t)\,dt\geq 0$$

Soluţie. Fie $H,K:[a,b]\to\mathbb{R}$, definite respectiv prin

$$H(x) = \int_a^x F(t)\,G(t)\,dt, \quad K(x) = H(x) - F(x)\int_a^x G(t)\,dt$$

Evident H şi K sunt derivabile şi.

$$K'(x) = H'(x) - F(x)\,G(x) - F'(x)\int_a^x G(t)\,dt = -F'(x)\int_a^x G(t)\,dt$$

Din ipotezele problemei rezultă $K'(x)\geq 0$, $(\forall) x\in[a,b]$, deci K este crescătoare pe $[a,b]$. Rezultă deci că avem $K(x)\geq K(a)=0$, $(\forall) x\in[a,b]$. Întrucât $K(x)\leq H(x)$, $(\forall) x\in[a,b]$ are loc inegalitatea $H(x)\geq 0$, $(\forall) x\in[a,b]$, care este chiar inegalitatea enunţului.

Aplicația 3. Fie $f, g, \varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$, f și φ continue, pozitive, g de clasă C^1, crescătoare cu $g(a) > 0$. Dacă $0 < \alpha < \beta$ și

$\int_a^x f^\beta(t)\,\varphi(t)\,dt \le \int_a^x g^\beta(t)\,\varphi(t)\,dt, \quad (\forall)\, x \in [a,b]$

atunci, $(\forall)\, x \in [a,b]$ are loc inegalitatea

$$\int_a^x f^\alpha(t)\,\varphi(t)\,dt \le \int_a^x g^\alpha(t)\,\varphi(t)\,dt$$

Soluție. Aplicând inegalitatea lui Hölder cu $p = \frac{\beta}{\alpha}$, $q = \frac{\beta}{\beta-\alpha}$ avem succesiv

$$\left(\int_a^x f^\alpha(t)\,\varphi(t)\,dt\right)^\beta = \left[\int_a^x \frac{f^\alpha(t)\,\varphi^{\frac{\alpha}{\beta}}(t)}{\frac{\alpha(\beta-\alpha)}{\beta}}\; g^{\frac{\alpha(\beta-\alpha)}{\beta}}(t)\cdot\varphi^{\frac{\beta-\alpha}{\alpha}}(t)\,dt\right]^\beta \le$$

$$\le \left(\int_a^x \frac{f^\beta(t)\,\varphi(t)}{g^{\beta-\alpha}(t)}\right)^\alpha \left(\int_a^x g^\alpha(t)\,\varphi(t)\,dt\right)^{\beta-\alpha} =$$

$$= \left[\int_a^x \frac{f^\beta(t) - g^\beta(t)}{g^{\beta-\alpha}(t)}\,\varphi(t)\,dt + \int_a^x g^\alpha(t)\,\varphi(t)\,dt\right]^\alpha \cdot \left(\int_a^x g^\alpha(t)\,\varphi(t)\,dt\right)^{\beta-\alpha}$$

Reținem deci inegalitatea

$$(*)\quad \left(\int_a^x f^\alpha(t)\,\varphi(t)\,dt\right)^\beta \le \left[\int_a^x \frac{f^\beta(t) - g^\beta(t)}{g^{\beta-\alpha}}\cdot\varphi(t)\,dt + \int_a^x g^\alpha(t)\,\varphi(t)\,dt\right]^\alpha \cdot \left(\int_a^x g^\alpha(t)\,\varphi(t)\,dt\right)^{\beta-\alpha}$$

Condiția enunțului și rezultatul stabilit în aplicația 2 cu

$F(x) = \frac{1}{g^{\beta-\alpha}(x)}$ și $G(x) = (g^\beta(x) - f^\beta(x))\,\varphi(x)$ conduc la

$$\binom{*}{*}\qquad \int_a^x \frac{f^\beta(t) - g^\beta(t)}{g^{\beta-\alpha}(t)}\,\varphi(t)\,dt \le 0, \quad (\forall)\, x \in [a,b]$$

Inegalitățile $(*)$ și $\binom{*}{*}$ demonstrează inegalitatea enunțului.

Aplicaţia 4. Fie $I,J\subset\mathbb{R}$ intervale $g:I\to J$, $f:J\to\mathbb{R}$ două funcţii continue. Dacă g este derivabilă cu derivata crescătoare şi strict pozitivă iar F o primitivă a lui f, au loc inegalităţile

$$\frac{F(g(b))-F(g(a))}{g'(b)}\le\int_a^b f(g(x))\,dx\le\frac{F(g(b))-F(g(a))}{g'(a)}$$

Soluţie. Fie $H:[a,b]\to\mathbb{R}$, $H(t)=\int_t^b f(g(x))\,dx-\frac{F(g(b))-F(g(t))}{g'(b)}$

Evident $H(b)=0$. E clar că H este derivabilă şi

$$H'(t)=-f(g(t))+\frac{f(g(t))\,g'(t)}{g'(b)}=\frac{f(g(t))\,(g'(t)-g'(b))}{g'(b)}\le 0,\ (\forall)\,t\in[a,b]$$

căci g' este crescătoare, $f(g(t))\ge 0$, $g'(b)>0$. Rezultă atunci că H este descrescătoare şi deci $H(t)\ge H(b)=0$, $(\forall)\,t\in[a,b]$. Prin urmare, inegalitatea din stânga este demonstrată.

Pentru inegalitatea din dreapta, se consideră funcţia $G:[a,b]\to\mathbb{R}$

$$G(t)=\frac{F(g(t))-F(g(a))}{g'(a)}-\int_a^t f(g(x))\,dx.$$ Evident $g(a)=0$

Deoarece $G'(t)=\frac{f(g(t))\,g'(t)}{g'(a)}-f(g(t))=\frac{f(g(t))\,(g'(t)-g'(a))}{g'(a)}$

şi g' este crescătoare, $f(g(t))>0$, $g'(a)>0$ rezultă că $G'(t)\ge 0$, $(\forall)\,t\in[a,b]$, deci G este crescătoare. Prin urmare $G(t)\ge G(a)=0$, care este tocmai inegalitatea din dreapta.

3.1. Propoziţie. *Dacă $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ sunt integrabile pe $[a,b]$ şi $f(x)\le g(x)$, $(\forall)\,x\in[a,b]$, atunci are loc inegalitatea*

$$\int_a^b f(x)\,dx\le\int_a^b g(x)\,dx \tag{3.1}$$

3.2 Consecinţă. Dacă $f:[a,b]\to\mathbb{R}_+$ este integrabilă pe $[a,b]$, are loc inegalitatea

$$\int_a^b f(x)\,dx\ge 0 \tag{3.2}$$

cu egalitate dacă şi numai dacă $f(x)=0$, $(\forall)x\in[a,b]$

3.3. **Consecinţă.** Dacă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ este integrabilă pe $[a,b]$, $m=\inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $M=\sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, au loc inegalităţile

$$m\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\le M \tag{3.3}$$

Vom prezenta în continuare unele aplicaţii ale rezultatelor prezentate mai sus.

Aplicaţia 5. Fie $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}(1+x)^{\frac{1}{x}}, & x>0\\ e, & x=0\end{cases}$

Are loc inegalitatea

$$e^2<\int_0^{e^2} f(x)\,dx<e^{2+1}$$

Soluţie. Funcţia $g(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$ este continuă, strict descrescătoare, cu $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=e$. Rezultă atunci că

$$\max_{x\ge 0} g(x)=e=\max_{x\ge 0} f(x)$$

şi deci $1<f(x)\le e$, de unde, prin integrare de $[0,e^2]$ se obţine inegalitatea enunţului.

Aplicaţia 6. Fie $f:\mathbb{R}_+\to(0,+\infty)$ o funcţie continuă iar $\Delta_n=\{0=x_0<x_1<\ldots<x_{n-1}<x_n=1\}$ o diviziune a lui $[0,1]$. Să se arate că are loc inegalitatea

$$n+\ln\prod_{i=1}^{n} a_i\le\int_0^1 f(t)\,dt\le\sum_{i=1}^{n} e^{a_i-1},\quad a_i=\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\,dt,\quad i=\overline{1,n}$$

Soluţie. Fie $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=e^{x-1}-x$. Studiul variaţiei lui g conduce la concluzia că $\min\limits_{x\in(0,+\infty)} g(x)=g(1)=0$. Rezultă deci că

$g(x)\ge g(1)=0$, $(\forall)x\in(0,+\infty)$ adică $e^{x-1}\ge x$, $(\forall)x\in(0,+\infty)$

Logaritmând inegalitatea precedentă, se obţin inegalităţile

$$1+\ln x\le x\le e^{x-1},\quad(\forall)x\in(0,+\infty) \tag{*}$$

Aplicând (*) pentru $x=a_i=\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\,dt>0$, $i=\overline{1,n}$ şi sumând inegalităţile obţinute se obţin inegalităţile enunţului.

Aplicaţia 7. Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcţie de clasă C^1, cu derivata nenulă

i) Să se arate că $\int_a^b f(t)\,dt=\int_{f(a)}^{f(b)} \frac{t\,dt}{f'(f^{-1}(t))}$

ii) Dacă în plus: $f'(x)>0$, $(\forall)x\in[a,b]$, $h:[a,b]\to\mathbb{R}$, $h(x)=\frac{f(x)}{f'(x)}$ este strict crescătoare, $a<x_1<x_2<b$, au loc inegalităţile

$$(f(x_2)-f(x_1))\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}\le\int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt\le(f(x_2)-f(x_1))\frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$

Soluţie. i) Din ipoteză rezultă că f este strict crescătoare sau strict descrescătoare pe $[a,b]$. În integrala

$$\int_{f(a)}^{f(b)} \frac{t\,dt}{f'(f^{-1}(t))}$$

facem schimbarea de variabilă $t=f(x)$, $x=f^{-1}(t)$ şi obţinem

$$\int_{f(a)}^{f(b)} \frac{t\,dt}{f(f^{-1}(t))}=\int_{f^{-1}(f(a))}^{f^{-1}(f(b))} \frac{f(x)}{f'(x)}f'(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx$$

ii) Fie $f'(x)>0$, $(\forall)x\in[a,b]$, $h(x)=\frac{f(x)}{f'(x)}$ este strict crescătoare şi pentru $a<x_1<x_2<b$ avem

$$f(x_2)-f(x_1)=\int_{x_1}^{x_2} f'(t)\,dt$$

Inegalitatea enunţului este atunci echivalentă cu

$$\int_{x_1}^{x_2} f'(t)\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}\,dt\le\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx\le\int_{x_1}^{x_2} f'(t)\frac{f(x_2)}{f'(x_2)}\,dt$$

Demonstrăm inegalităţile

(*) $$f'(x)\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}\le f(x)\le f'(x)\frac{f(x_2)}{f'(x_2)},\quad(\forall)x\in[x_1,x_2]$$

Cum $f'(x)>0$, $(\forall)x\in[a,b]$, (*) sunt echivalente cu inegalitățile

$$\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}\le\frac{f(x)}{f'(x)}\le\frac{f(x_2)}{f'(x_2)},\ (\forall)x\in(x_1,x_2]$$

Ultimele inegalități sunt evident adevărate, căci funcția $h:[a,b]\to\mathbb{R}$, $h(x)=\dfrac{f(x)}{f'(x)}$ este strict crescătoare. Rezultă atunci că (*) este adevărată. Integrând (*) între limitele x_1 și x_2 se obține inegalitatea enunțului.

Aplicația 8. Fie $f,g,h:\to\mathbb{R}$ trei funcții continue. Să se arate că ele sunt egale dacă și numai dacă au loc inegalitățile

$$\int_a^b(f(x)g(x)+f(x)h(x)+g(x)h(x))\,dx\ge3\int_a^b f^2(x)\,dx\ge3\int_a^b g^2(x)\,dx\ge$$
$$\ge3\int_a^b h^2(x)\,dx$$

Soluție. Dacă $f=g=h$ inegalitățile enunțului sunt evidente. Pentru implicația inversă, din enunț avem

$$\int_a^b(f(x)g(x)+f(x)h(x)+g(x)h(x))\,dx\ge3\int_a^b f^2(x)\,dx$$

$$\int_a^b(f(x)g(x)+f(x)h(x)+g(x)h(x))\,dx\ge3\int_a^b g^2(x)\,dx$$

$$\int_a^b(f(x)g(x)+f(x)h(x)+g(x)h(x))\,dx\ge3\int_a^b h^2(x)\,dx$$

Adunând membru cu membru inegalitățile precedente, suntem conduși la inegalitatea

$$(*)\qquad\int_a^b\left((f(x)-g(x))^2+(f(x)-h(x))^2+(g(x)-h(x))^2\right)dx\le0$$

Deoarece funcția $F:[a,b]\to\mathbb{R}$, $F(x)=((f(x)-g(x))^2+(f(x)-h(x))^2+(g(x)-h(x))^2)$ este nenegativă pe $[a,b]$, in (*) nu poate avea loc decât semnul egal. Rezultă că $F(x)=0$, $(\forall)x\in[a,b]$ din care se obține că $f(x)=g(x)=h(x)$, $(\forall)x\in[a,b]$.

Aplicația 9. Dacă $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ are proprietățile

i) f este continuă în $x=1$

ii) f este integrabilă pe $[1,2]$

iii) $f(x^2)\le xf(x)$, $(\forall)x\in(0,+\infty)$

are loc inegalitatea

$$2\int_1^2 f(x)\,dx\le 3f(1)$$

Soluție. Din ipoteza iii) deducem succesiv

$$f(x^2)\le xf(x)\le x\sqrt{x}f(\sqrt{x})\le\ldots\le x\sqrt{x}\sqrt[4]{x}\ldots\sqrt[2^n]{x}f\left(\sqrt[2^n]{x}\right),\ (\forall)n\in\mathbb{N}^*$$

sau

(*) $$f(x)\le x^{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}}f\left(x^{\frac{1}{2^n}}\right),\ (\forall)n\in\mathbb{N}^*,\ (\forall)x\in(0,+\infty)$$

Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}x^{\frac{1}{2^n}}=1$ și f este continuă în $x=1$, din inegalitatea (*) deducem că $f(x)\le xf(1)$, $(\forall)x\in(0,+\infty)$ și deci $\int_1^2 f(x)\,dx\le f(1)\int_1^2 x\,dx=\frac{3}{2}f(1)$, care este echivalentă cu inegalitatea enunțului.

Aplicația 10. Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcție continuă, monoton crescătoare. Să se arate că $(\forall)t\in[a,b]$ are loc inegalitatea

$$\int_a^t f(x)\,dx\le\frac{t-a}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Soluție. Fie $g:[a,b]\to\mathbb{R}$, $g(t)=\int_a^t f(x)\,dx-\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}(t-a)$

Cum $F:[a,b]\to\mathbb{R}$, $F(t)=\int_a^t f(x)\,dx$ este o primitivă a lui f iar $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ este o constantă, rezultă ca g este derivabilă și $g'(t)=f(t)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx=f(t)-f(c)$, unde $c\in[a,b]$ se obține din prima teoremă de medie a integralei definite. Deoarece f este crescătoare, rezultă că $(\forall)\, t\in[a,c]$ $f(t)\le f(c)$, deci $g'(t)\le 0$. Analog, $(\forall)\, t\in[c,b]$ $f(t)\ge f(c)$, deci $g'(t)\ge 0$. În plus $g(a)=g(b)=0$. Rezultă atunci următorul tabel de variație a lui g

t	a			c				b
g'(t)	−	−	−	0	+	+	+	+
g(t)	0	↘		g(c)	↗			0

Prin urmare $g(t)\le 0$, $(\forall)\, t\in[a,b]$ și deci $\int_a^t f(x)\,dx\le \frac{t-a}{t-b}\int_a^b f(x)\,dx$

Aplicația 11. Fie $f:[0,1]\to\mathbf{R}$. Dacă f este derivabilă pe $[0,1]$ și există un $a\in[0,1]$ cu proprietatea $\int_0^a f(x)\,dx=0$, are loc inegalitatea

$$\left|\int_0^1 f(x)\,dx\right|\le\frac{1-a}{2}\sup_{x\in[0,1]}|f'(x)|$$

Când are loc inegalitatea?

Soluție. Din $\int_0^a f(t)\,dt=0$, prin schimbarea de variabilă $x=\varphi(t)=at$, rezultă că $\int_0^1 f(ax)\,dx=0$. Aplicând funcției f teorema lui Lagrange pe $[ax,x]$, deducem că

$$|f(x)-f(ax)|\le(1-a)x\sup_{x\in[0,1]}|f'(x)|$$

Deci

$$\left|\int_0^1 f(x)\,dx\right|=\left|\int_0^1 (f(x)-f(ax))\,dx\right|\le\int_0^1|f(x)-f(ax)|\,dx\le$$

$$\le\frac{1-a}{2}x^2\Big|_0^1\sup_{x\in[0,1]}|f'(x)|=\frac{1-a}{2}\sup_{x\in[0,1]}|f'(x)|$$

Egalitatea are loc pentru funcţii $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\pm M\left(x-\frac{1}{2}a\right)$

Aplicaţia 12. Fie $a\in(0,+\infty)$. Să se determine cea mai mare valoare a lui $\lambda\in\mathbb{R}$ pentru care are loc inegalitatea

$$\left(\int_0^a f(t)\,dt\right)^2\geq\lambda\int_0^a f^3(t)\,dt$$

oricare ar fi funcţia $f:[0,a]\to\mathbb{R}$, derivabilă cu $f'(x)\leq 1$, $(\forall)\,x\in[0,a]$ şi $f(0)=0$.

Soluţie. Demonstrăm că orice funcţie f cu proprietăţile enunţului satisface inegalitatea

(1) $$\left(\int_0^a f(t)\,dt\right)^2\geq\int_0^a f^3(t)\,dt$$

În scopul propus, fie $F:[0,a]\to\mathbb{R}$, $F(x)=\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)^2-\int_0^x f^3(t)\,dt$

Evident F este derivabilă şi

$$F'(x)=2f(x)\int_0^x f(t)\,dt-f^3(x)=f(x)\left(2\int_0^x f(t)\,dt-f^2(x)\right)=f(x)\,G(x)$$

unde $G:[0,a]\to\mathbb{R}$, $G(x)=2\int_0^x f(t)\,dt-f^2(x)$.

Observăm că G este derivabilă şi

$G'(x)=2f(x)-2f(x)\cdot f'(x)=2f(x)(1-f'(x))\geq 0$, $(\forall)\,x\in[0,a]$. Rezultă că G este crescătoare pe $[0,a]$. Cum $G(0)=0$, rezultă că $G(x)\geq 0$, $(\forall)\,x\in[0,a]$ şi deci $F'(x)\geq 0$, $(\forall)\,x\in[0,a]$, adică şi F este crescătoare pe $[0,a]$. Deoarece $F(0)=0$, deducem că $F(x)\geq 0$, $(\forall)\,x\in[0,a]$. În particular $F(a)\geq 0$, deci (1) are loc.

Inegalitatea (1) arată că valoarea $\lambda_0=1$ satisface inegalitatea enunţului.

Vom arăta în continuare că orice altă valoare λ care satisface inegalitatea enunţului este mai mică cel mult egală cu λ_0.

Într-adevăr, fie λ arbitrar și $f:[0,a]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x$. Evident f este derivabilă, $f(0)=0$ și $f'(x)\le 1$, $(\forall)x\in[0,a]$. Scriind inegalitatea enunțului pentru această funcție obținem $\frac{a^4}{4}\le\lambda\frac{a^4}{4}$, din care rezultă că $\lambda\le 1$. În concluzie, $\lambda_0=1$ este valoarea căutată.

Aplicația 13. Fie $f:[0,a]\to\mathbb{R}$ o funcție derivabilă cu proprietatea că $f'(x)<\frac{1}{a}$, $(\forall)x\in[0,a]$. Să se arate că

$$\frac{1}{a}\int_0^a f(x)\,dx<\frac{1}{2}+f(0)$$

Soluție. Aplicând teorema lui Lagrange pe $[0,x]$, $x\in(0,a]$ deducem că $(\exists)c_x\in(0,x)$ astfel încât

$$f(x)-f(0)=x\cdot f'(c_x)\le\frac{x}{a},\quad(\forall)x\in[0,a]$$

din care, prin integrare, rezultă afirmația enunțului.

Aplicația 14. Să se arate că $\int_0^1 f^2(t)\,dt\ge\frac{1}{3}$ pentru orice funcție continuă $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ care are proprietatea că

$$\int_x^1 f(t)\,dt\ge\frac{1-x^2}{2},\quad(\forall)x\in[0,1].$$

Soluție. Deoarece f este continuă rezultă că f este primitivabilă.
Fie $F:[0,1]\to\mathbb{R}$ o primitivă a lui f. Din ipoteză rezultă că

$$F(1)-F(x)\ge\frac{1-x^2}{2},\quad(\forall)x\in[0,1]\Rightarrow\int_0^1(F(1)-F(x))\,dx\ge\frac{1}{3}\qquad(*)$$

Pe de altă parte

$$\int_0^1(F(1)-F(x))\,dx=F(1)-\int_0^1 x'F(x)\,dx=F(1)-xF(1)\Big|_0^1-\int_0^1 xf(x)\,dx$$

adică

$$\int_0^1 xf(x)\,dx=\int_0^1(F(1)-F(x))\,dx\qquad\binom{*}{*}$$

Relațiile (*) și $\binom{*}{*}$ conduc la inegalitatea

$$\int_0^1 xf(x)\,dx \geq \frac{1}{3} \tag{1}$$

Deoarece $(f(x)-x)^2 \geq 0$, $(\forall)\, x \in [0,1]$, rezultă că

$$f^2(x) \geq 2xf(x) - x^2, \quad (\forall)\, x \in [0,1] \tag{2}$$

Integrând (2) și ținând seama de (1), avem

$$\int_0^1 f^2(x)\,dx \geq 2\int_0^1 xf(x)\,dx - \int_0^1 x^2 dx \geq \frac{2}{3} - \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

și problema este rezolvată.

Aplicația 15. Fie $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ derivabilă, cu derivata crescătoare.
Are loc inegalitatea

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \leq f(-1) + f'(1)$$

Soluție. Aplicând teorema lui Lagrange pe $[-1,x]$, $x\in(-1,1]$ rezultă că $(\exists)\, c_x \in (-1,x)$ astfel încât

$$f(x) - f(-1) = f'(c_x)(x+1), \quad (\forall)\, x \in (-1,1]$$

Cum f' este crescătoare, rezultă că $f'(c_x) \leq f'(1)$ și deci

$$f(x) - f(-1) \leq f'(1)(x+1), \quad (\forall)\, x \in (-1,1]$$

Integrând inegalitatea precedentă între limitele -1 și 1 se obține inegalitatea enunțului.

4. Inegalități integrale deduse din semnul funcției de gradul doi.

Este binecunoscut rezultatul exprimat în

4.1. Propoziție. *Fie $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$. Are loc inegalitatea*

(4.1.) $$x^2 - (a+b)x + ab \leq 0, \quad (\forall)\, x \in [a,b]$$

Vom utiliza acest rezultat în obținerea unor inegalități integrale.

Aplicația 1. Fie $f:[0,1]\to[a,b]$ o funcție integrabilă cu proprietatea că $\int_0^1 f(x)\,dx=0$. Are loc inegalitatea

$$\int_0^1 f^2(x)\,dx \le -ab$$

Soluție. Evident $f^2(x)\le (a+b)f(x)-ab$, $(\forall)x\in[0,1]$ care integrată conduce la inegalitatea enunțului.

Aplicația 2. Fie $f:[0,1]\to[1,2]$ o funcție continuă cu proprietatea că $\int_0^1 f(x)\,dx=2$. Să se arate că $\int_0^1 \frac{dx}{f(x)}=\frac{1}{2}$

Soluție. Din ipoteză avem că $1\le f(x)\le 2$, $(\forall)x\in[0,1]$, deci

$$\frac{1}{2}\le\frac{1}{f(x)}\le 1,\ (\forall)x\in[0,1]\Rightarrow\frac{1}{2}\le\int_0^1\frac{1}{f(x)}\,dx \qquad (*)$$

Pe de altă parte

$$f^2(x)-3f(x)+2\le 0,\ (\forall)x\in[0,1]\Rightarrow\frac{1}{f(x)}\le\frac{3}{2}-\frac{1}{2}f(x),\ (\forall)x\in[0,1]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\int_0^1\frac{1}{f(x)}\,dx\le\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{1}{2} \qquad \binom{*}{*}$$

Inegalitățile $(*)$ și $\binom{*}{*}$ conduc la inegalitatea enunțului.

Aplicația 3 (L.V.Kantorovici). Fie $f,g:[c,d]\to[0,+\infty)$ două funcții continue astfel încât $g(x)\in[m,M]\subset(0,+\infty)$, $(\forall)x\in[c,d]$. Să se arate că are loc inegalitatea

$$\left(\int_c^d f(x)g(x)\,dx\right)\left(\int_c^d\frac{f(x)}{g(x)}\,dx\right)\le\frac{(m+M)^2}{4mM}\left(\int_c^d f(x)\,dx\right)^2$$

Soluție. Din ipoteza că $g(x)\in[m,M]$, $(\forall)x\in[c,d]$ rezultă

$$(*) \qquad g(x)+\frac{m\cdot M}{g(x)}\le m+M,\ (\forall)x\in[c,d].$$

Înmulțind $(*)$ prin $f(x)\ge 0$, $(\forall)x\in[c,d]$ și integrând se obține

$$\binom{*}{*} \qquad \int_c^d f(x)g(x)\,dx+mM\int_c^d\frac{f(x)}{g(x)}\,dx\le(m+M)\int_c^d f(x)\,dx$$

Inegalitatea medillor permite minorarea membrului stâng al inegalității $\binom{*}{*}$ în forma

$$2\sqrt{mM\left(\int_c^d f(x)g(x)\,dx\right)\left(\int_c^d \frac{f(x)}{g(x)}\right)dx} \le \int_c^d f(x)g(x)\,dx + mM\int_c^d \frac{f(x)}{g(x)}\,dx$$

Folosind minorarea precedentă și $\binom{*}{*}$ deducem că are loc

$$4mM\left(\int_c^d f(x)g(x)\,dx\right)\left(\int_c^d \frac{f(x)}{g(x)}\,dx\right) \le (m+M)^2\left(\int_c^d f(x)\,dx\right)^2$$

care este chiar inegalitatea enunțului.

Aplicația 4 (Schweitzer) Fie $g:[c,d]\to(0,+\infty)$ o funcție continuă cu proprietatea că $g(x)\in[m,M]\subset(0,+\infty)$, $(\forall)\,x\in[c,d]$. Are loc inegalitatea

$$\left(\int_c^d g(x)\,dx\right)\left(\int_c^d \frac{dx}{f(x)}\right) \le \frac{(m+M)^2}{4mM}(d-c)^2$$

Soluție. În inegalitatea lui L.V.Kantorovici se alege $f(x)=1$, $(\forall)\,x\in[c,d]$.

Aplicația 5 (Polya-Szegö) Fie $g,h:[c,d]\in(0,+\infty)-\mathbb{R}$ continue astfel încât $g(x)\in[a,A]\subset(0,+\infty)$, $h(x)\in[b,B]\subset(0,+\infty)$, $(\forall)\,x\in[c,d]$. Să se demonstreze inegalitatea

$$\left(\int_c^d g^2(x)\,dx\right)\left(\int_c^d h^2(x)\,dx\right) \le \frac{(ab+AB)^2}{4abAB}\left(\int_c^d g(x)h(x)\,dx\right)^2$$

Soluție. Se aplică un procedeu similar celui din demonstrația inegalității lui L.V.Kantorovici.

Aplicația 6 (Greub - Rheiboldt). Fie $f,g,h:[c,d]\to(0,+\infty)$ continue, astfel încât $g(x)\in[a,A]\subset(0,+\infty)$, $h(x)\in[b,B]\subset(0,+\infty)$, $(\forall)\,x\in[c,d]$. Atunci funcțiile $f\cdot g^2$, $f\cdot h^2$, $f\cdot g\cdot h$ sunt integrabile pe $[c,d]$ și are loc inegalitatea

$$\left(\int_c^d (f\cdot g^2)(x)\,dx\right)\cdot\left(\int_c^d (f\cdot h^2)(x)\,dx\right) \le \frac{(ab+AB)^2}{4abAB}\left(\int_c^d (f\cdot g\cdot h)(x)\,dx\right)^2$$

Soluție. Notăm $m=\frac{a}{B}$, $M=\frac{A}{b}$, $x_k=\frac{a_k}{b_k}$, $k=\overline{1,n}$.

Observăm că $a_k \in [a,A]$, $b_k \in [b,B]$ dacă și numai dacă $x_k \in [m,M]$ $(\forall) k=\overline{1,n}$, $x_k=m$ dacă și numai dacă $a_k=a$, $b_k=B$ iar $x_k=M$ dacă și numai dacă $a_k=A$, $b_k=b$, $k=\overline{1,n}$.

Considerăm funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x^2-(m+M)x+mM$, care are proprietatea $g(x)\le 0$, $(\forall) x\in[m,M]$. Rezultă atunci că

$$x_k^2-(m+M)x_k+mM\le 0,\ (\forall) k=\overline{1,n}$$

Fie $t_k\in[0,+\infty)$, $(\forall) k=\overline{1,n}$. Folosind inegalitățile precedente și exprimările lui x_k, m, M în funcție de a_k, b_k, A, B deducem că

$$(1)\qquad t_k\cdot a_k^2-t_k\left(\frac{a}{B}+\frac{A}{b}\right)a_k b_k+\frac{aA}{bB}t_k\cdot b_k^2\le 0,\ (\forall) k=\overline{1,n}$$

După ușoare transformări, din (1) deducem că

$$(2)\qquad bB\sum_{k=1}^{n} t_k a_k^2+aA\sum_{k=1}^{n} t_k b_k^2\le (aA+bB)\sum_{k=1}^{n} t_k a_k b_k$$

Conform inegalității mediilor are loc inegalitatea

$$(3)\qquad abAB\left(\sum_{k=1}^{n} t_k a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} t_k b_k^2\right)\le\frac{1}{4}\left(bB\sum_{k=1}^{n} t_k a_k^2+aA\sum_{k=1}^{n} t_k b_k^2\right)^2$$

Inegalitățile (2) și (3) conduc la inegalitatea

$$(4)\qquad \left(\sum_{k=1}^{n} t_k a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} t_k b_k^2\right)\le\frac{(ab+AB)^2}{4abAB}\cdot\left(\sum_{k=1}^{n} t_k a_k b_k\right)^2$$

Rezultatul exprimat în (4) va fi folosit în demonstrarea inegalității enunțului.

Deoarece f,g,h sunt continue pe $[c,d]$, rezultă că $f\cdot g^2, f\cdot h^2, f\cdot g\cdot h$ sunt de asemenea continue pe $[c,d]$, deci integrabile pe acest interval.

Fie $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $\Delta_n=\{c=x_0^n<x_1^n<\ldots<x_n^n=d\}$ un șir de diviziuni a lui $[c,d]$ cu $\lim\limits_{n\to\infty}\|\Delta_n\|=0$ iar $\xi_n=(\xi_1^n,\xi_2^n,\ldots,\xi_n^n)$ un sistem de puncte intermediare asociat acestei diviziuni $x_{k-1}^n\le\xi_k^n\le x_k^n$, $(\forall) k=\overline{1,n}$. Notăm

prin σ_{Δ_n} suma Riemann relativă la diviziunea Δ_n şi la sistemul de puncte intermediare ξ_n precizat anterior.

Aplicând inegalitatea (4) cu $t_k=f(\xi_k^n)$, $a_k=g(\xi_k^n)$, $b_k=h(\xi_k^n)$ avem

$$\sigma_{\Delta_n}(fg^2,\xi_n)\cdot\sigma_{\Delta_n}(fh^2,\xi_n)=\left(\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k^n)g^2(\xi_k^n)\right)(x_k-x_{k-1})\cdot$$

$$\cdot\left(\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k^n)h^2(\xi_k^n)(x_k-x_{k-1})\right)\le\frac{(ab+AB)^2}{4abAB}\left(\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k^n)g(\xi_k^n)h(\xi_k^n)\cdot(x_k-x_{k-1})\right)=$$

$$=\frac{(ab+AB)^2}{4abAB}\left(\sigma_{\Delta_n}(fgh,\xi_n)\right)^2$$

Trecând la limită pentru $n\to\infty$ se obţine că

$$\left(\int_c^d (fg^2)(x)\,dx\right)\left(\int_c^d (fh^2)(x)\,dx\right)\le\frac{(ab+AB)^2}{4abAB}\left(\int_c^d (fgh)(x)\,dx\right)^2$$

deci integrala lui Greub - Rheinboldt este demonstrată.

Observaţie. Dacă în integrala lui Greub - Rheinboldt particularizăm $f(x)=1$, $(\forall)x\in[c,d]$, regăsim inegalitatea lui Polya şi Szegö.

În continuare vom stabili o inegalitate integrală de tipul celor precedente în demonstrarea căreia vom folosi o generalizare a inegalităţii mediilor, exprimată în

4.2. Propoziţie. *Dacă* $x_i\in\mathbb{R}_+^*$, $t_i\in\mathbb{R}_+^*$, $(\forall)i=\overline{1,n}$, $t=\sum_{i=1}^{n}t_i$ *are loc inegalitatea*

$$\left(\sum_{i=1}^{n}t_ix_i\right)^t\ge t^t\prod_{i=1}^{n}x_i^{t_i}\tag{4.2}$$

Demonstraţie. Funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ $f(x)=\ln x$ este concavă căci $f''(x)=-\frac{1}{x^2}<0$, $(\forall)x\in(0,+\infty)$. Conform inegalităţii lui Jensen pentru funcţii concave, avem

$$\ln\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{t_i}{t}x_i\right)\geq\sum_{i=1}^{n}\frac{t_i}{t}\ln x=\ln\left(\prod_{i=1}^{n}x_i^{\frac{t_i}{t}}\right)$$

Ţinând seama de monotonia funcţiei logaritmice, inegalitatea precedentă conduce la

$$\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{n}t_ix_i\geq\left(\prod_{i=1}^{n}x_i^{t_i}\right)^{\frac{1}{t}}$$

care este echivalentă cu 4.2.

Observaţie. Dacă în 4.2. particularizăm

$t_i=\frac{1}{n}$, $(\forall)i=\overline{1,n}$ $t=1$, regăsim inegalitatea mediilor.

Aplicaţia 7. Fie $a,b,c,d\in\mathbb{R}$, $a<b$, $0<c<d$ iar $f:[a,b]\to[c,d]$ o funcţie integrabilă. Are loc inegalitatea

$$\left(\int_a^b f(x)\,dx\right)\left(\int_a^b\frac{dx}{f(x)}\right)^{cd}\leq\left(\frac{(b-a)(c+d)}{1+cd}\right)^{1+cd}$$

Soluţie. Din ipoteză şi propoziţia 4.1. rezultă că

$$\frac{1}{1+cd}f(x)+\frac{cd}{1+cd}\cdot\frac{1}{f(x)}\leq\frac{c+d}{1+cd},\ (\forall)x\in[c,d]$$

Prin integrare între limitele a şi b, inegalitatea precedentă conduce la

$$\frac{1}{1+cd}\int_a^b f(x)\,dx+\frac{cd}{1+cd}\int_a^b\frac{1}{f(x)}\,dx\leq\frac{(b-a)(c+d)}{1+cd}$$

Aplicând acum (4.2) cu

$n=2$, $t_1=\frac{1}{1+cd}$, $x_1=\int_a^b f(x)\,dx$, $t_2=\frac{cd}{1+cd}$, $x_2=\int_a^b\frac{1}{f(x)}\,dx$ obţinem inegalitatea enunţului.

Aplicaţia 8 (Cebâşev) Dacă $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ sunt continue şi monotone de sens contrar pe $[a,b]$, are loc inegalitatea

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx\leq\frac{1}{b-a}\left(\int_a^b f(x)\,dx\right)\left(\int_a^b g(x)\,dx\right)$$

Soluţie. Fără a micşora generalitatea putem presupune că f este crescătoare, iar g descrescătoare. Fie

$$\alpha=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\in[f(a),f(b)],\ c=\sup\{x\in[a,b]\mid f(x)\leq\alpha\}$$

Ţinând seama de monotonia funcţiilor f şi g, au loc inegalităţile

$$\alpha \geq f(x) \text{ şi } g(x) \geq g(c), \quad (\forall) x \in [a,c]$$

respectiv

$$\alpha \leq f(x) \text{ şi } g(x) \leq g(c), \quad (\forall) x \in [c,d]$$

Se obţin deci inegalităţile

$$(\alpha - f(x))\, g(x) \geq (\alpha - f(x))\, g(c), \quad (\forall) x \in [a,c]$$

respectiv

$$(\alpha - f(x))\, g(x) \geq (\alpha - f(x))\, g(c), \quad (\forall) x \in [c,b]$$

Prin integrare între limitele a şi b, inegalităţile precedente conduc la

$$\int_a^b (\alpha - f(x))\, g(x)\, dx = \int_a^c (\alpha - f(x))\, g(x)\, dx + \int_c^d (\alpha - f(x))\, g(x)\, dx \geq$$

$$\geq g(c) \int_a^c (\alpha - f(x))\, dx + g(c) \int_c^b (\alpha - f(x))\, dx = g(c) \int_a^b (\alpha - f(x))\, dx =$$

$$= g(c) \left[\alpha (b-a) - \int_a^b f(x)\, dx \right] = g(c) \left[(b-a) \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx - \int_a^b f(x)\, dx \right] = 0$$

Rezultă deci că are loc inegalitatea

$$\alpha \int_a^b g(x)\, dx \geq \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx$$

sau, ţinând seama de valoarea lui $\alpha = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx$

$$\frac{1}{b-a} \left(\int_a^b f(x)\, dx \right) \left(\int_a^b g(x)\, dx \right) \geq \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx$$

5. Inegalităţi integrale deduse prin schimbarea de variabilă de tip translaţie

În acest paragraf vom prezenta un rezultat ce permite rezolvarea unitară a unei clase de inecuaţii funcţionale. Pentru început, reamintim

5.1. Teoremă. *Dacă $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ este integrabilă, are loc egalitatea*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b f(a+b-x)\, dx \tag{5.1}$$

Schimbarea de variabilă $t = a+b-x$ se numeşte schimbare de variabilă de tip translație.

5.2. **Teoremă.** *Fie $a,b,c,d\in\mathbb{R}$, $a<b$, $c<d$ iar $\alpha,\beta\in\mathbb{R}^*$. Dacă sunt îndeplinite condițiile*

i) $g,h:[a,b]\to[c,d]$ *sunt continue, neidentic nule pe* $[a,b]$

ii) $g(a+b-x)=h(x)$, $(\forall)x\in[a,b]$

iii) $\beta\cdot g([a,b])\subseteq[c,d]$, $\beta\cdot h([a,b])\subseteq[c,d]$

atunci unicele funcții $f\in C[c,d]$ *care satisfac inegalitatea*

$$(5.2)\qquad 2\alpha\int_a^b f(\beta\cdot g(x))\,h(x)\,dx\geq\int_a^b f^2[\beta\cdot h(x)]\,dx+\alpha^2\int_a^b g^2(x)\,dx$$

sunt soluțiile ecuației funcționale

$$(5.3)\qquad f(\beta\cdot h(x))=\alpha g(x),\quad(\forall)x\in[a,b]$$

Demonstrație. Arătăm că mulțimea soluțiilor lui (5.2) coincide cu mulțimea soluțiilor lui (5.3).

Fie $f\in C[c,d]$ o soluție a lui (5.3). Teorema 5.1 și ipoteza ii) conduc la exprimarea membrului stâng a lui (5.2) în forma

$$2\alpha\int_a^b f(\beta g(x))\,h(x)\,dx=2\alpha\int_a^b fg(a+b-x)\,h(a+b-x)\,dx=$$

$$=2\alpha\int_a^b f(\beta h(x))\,g(x)\,dx$$

Ținând seama de exprimarea precedentă, (5.2) se scrie sub forma echivalentă

$$(5.4)\qquad\int_a^b(f(\beta h(x))-\alpha g(x))^2\,dx\leq 0$$

Deoarece în (5.4) nu poate avea loc decât egalitatea, rezultă că $f(\beta h(x))=\alpha g(x)$, $(\forall)x\in[a,b]$, ceea ce înseamnă că f este soluție a ecuației (5.3).

Reciproc, fie $f\in C[c,d]$ o soluție a lui (5.3). Membrul stâng a lui (5.2) admite reprezentarea

$$2\alpha\int_a^b f(\beta g(x))\,h(x)\,dx=2\alpha\int_a^b f(\beta g(a+b-x))\,h(a+b-x)\,dx=$$

$$=2\alpha\int_a^b f(\beta h(x))\,g(x)\,dx=2\alpha^2\int_a^b g^2(x)\,dx$$

Membrul drept a lui (5.2) admite reprezentarea

$$\int_a^b f^2(\beta h(x))\,dx+\alpha^2\int_a^b g^2(x)\,dx=2\alpha^2\int_a^b g^2(x)\,dx$$

Prin urmare, orice soluţie $f\in C[c,d]$ a lui (5.3) satisface (5.2) cu egalitate. Teorema este astfel complet demonstrată.

Fără a intra în detalii de rezolvare, menţionăm două aplicaţii directe ale teoremei 5.2., rezolvată de altfel complet în [2].

Aplicaţia 1. Să se determine funcţiile $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ care satisfac

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\cos x\,dx \geq \frac{\pi}{16}+\int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2(\cos x)\,dx$$

Soluţie. Aplicând teorema 5.2., se obţine

$f(x)=\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}$, $(\forall)\, x\in[0,1]$

Aplicaţia 2. Dacă $p>0$ să se determine funcţiile continue $f:[0,p]\to\mathbb{R}$ care satisfac

$$2p\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(p\sin x)\cos x\,dx \geq \frac{\pi p^2}{4}+\int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2(p\cos x)\,dx$$

Soluţie. Se obţine funcţia $f:[0,p]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{p^2-x^2}$, $x\in[0,p]$

BIBLIOGRAFIE

1. **ARSINTE V.**, Probleme elementare de calcul integral, *Editura Universităţii Bucureşti* (1995), pag. 403-440
2. **BĂRBOSU D.**, Substituţii de tip translaţie în integrala definită, în "Matematica-Teme de sinteză şi teste", Baia Mare (1991)
3. **BĂRBOSU D.**, Probleme comentate, *Lucrările Seminarului de Creativitate Matematică*", vol.V (1995-1996), pag.1-10
4. **BĂRBOSU D.**, În legătură cu problema 0:757 din G.M. nr.7(1994) (va apare în "Matematikai Lapok")
5. **BĂRBOSU D.**, Asupra unei inecuaţii funcţionale, apărut în *Lucrările Seminarului de Creativitate Matematică*, vol.V (1995-1996), pag. 29-34
6. **BĂTINEŢU-GIURGIU D.M, CONSTANTINESCU Al.**, Asupra unei probleme dată la barajul pentru definitivarea echipei olimpice a României 1977, *Gazeta Matematică* nr.9 (1994), pag. 387-389
7. **BĂTINEŢU-GIURGIU D.M. şi colab.**,Analiză matematică. Exerciţii şi probleme, *Editura Militară*, Bucureşti (1992), pag. 9-27
8. **BĂTINEŢU-GIURGIU D.M.**,În legătură cu inegalitatea lui L.V.Kantorovici, *Gazeta Matematică*, nr.2 (1994), pag.51-60
9. **BĂTINEŢU-GIURGIU D.M.**,Inegalitatea lui Kantorovici pentru polinoame, *Gazeta Matematică* nr. 8(1994), pag. 337-341
10. **BOBOC N, COLOJOARĂ I**, Matematică. Manual pentru clasa a XII-a. Elemente de analiză matematică. *Editura Didactică şi Pedagogică* Bucureşti (1992), pag.51-93
11. **BUŞNEAG D, MAFTEI I**- Teme pentru cercurile şi concursurile de matematică ale elevilor, *Editura Scrisul românesc*, Craiova (1983), pag.54-62
12. **DONCIU N, FLONDOR D**, Algebră şi analiză matematică. Culegere de probleme, vol.II (1979), pag.29-35
14. * * * Colecţia Gazetei Matematice 1980 - 1995

INTEGRAL INEQUALITIES

Abstract. This paper has a methodological character. The purpose of the authors is to present unitar methods for solving integral inequalities. In the first section, we present the principal classical integral inequalities. In the second section we present integral inequalities which result from the property of convexity. The third section contains integral inequalities obtained using the monotonie. In section four, we present some inequalities obtained using the sign of the polynominal function of two degree. In the last section we give a method for solving some functional inequalities.

Universitatea din Baia Mare
Str. Victoriei nr. 76, 4800 Baia Mare
ROMÂNIA