Lucrările Seminarului de
CREATIVITATE MATEMATICĂ
Vol. 6 (1996-1997), 33-40

Dedicat celei de-a 35-a aniversări a Universității din Baia Mare

DEMONSTRAREA UNOR INEGALITĂŢI CU ŞI FĂRĂ AJUTORUL INDUCŢIEI MATEMATICE

Vasile BERINDE

Problema 2078 din Revista Matematică a Elevilor din Timişoara, 1976, cerând demonstrarea inegalităţilor

$$\frac{1}{5n+1}+\frac{1}{5n+2}+\ldots+\frac{1}{25n}>\frac{6}{5}; \tag{1}$$

$$\frac{1}{7n+1}+\frac{1}{7n+2}+\ldots+\frac{1}{49n}>\frac{11}{7},\ n\in N^{*}, \tag{2}$$

este inclusă în lucrarea [2] (integral) şi în culegera [1] (numai inegalitatea a doua), fără a fi rezolvate efectiv.

În loc de rezolvare este pusă doar indicaţia: "se demonstrează prin metoda inducţiei matematice". Pentru a suplini acest neajuns, ne propunem să dăm în continuare toate detaliile privind o metodă unitară de demonstrare a acestui tip de inegalităţi fără a folosi inducţia matematică, ilustrând totodată şi dificultăţile care apar atunci când apelăm la metoda inducţiei, dificultăţi care pot fi acum uşor depăşite.

Pentru a evidenția dificultățile pe care le implică utilizarea inducției, vom aplica mai întâi această metodă pentru demonstrarea unei inegalități mai simple, și anume

$$\frac{2}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}+\ldots+\frac{1}{4n}\geq\frac{7}{12},\ n\in\mathbb{N}^*. \tag{3}$$

Inegalitatea (3) este adevărată pentru $n=1$, căci ea revine la egalitatea

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12}.$$

Presupunem că (3) are loc pentru $n=k$, adică

$$\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}+\ldots+\frac{1}{4k}\geq\frac{7}{12}, \tag{4}$$

și demonstrăm că în această ipoteză inegalitatea (3) are loc și pentru $n=k+1$, adică avem

$$\frac{1}{2(k+1)+1}+\frac{1}{2(k+1)+2}+\ldots+\frac{1}{4(k+1)}\geq\frac{7}{12},$$

ceea ce revine la a demonstra că

$$\frac{1}{2k+3}+\frac{1}{2k+4}+\ldots+\frac{1}{4k+4}\geq\frac{7}{12}. \tag{5}$$

Pentru a putea valorifica inegalitatea (4), presupusă adevărată, completăm termenii lipsă și-i eliminăm pe cei în plus, astfel încât din (4) să obținem membrul stâng al inegalității (5), care trebuie demonstrată.

Aceasta revine în fapt la a aduna în ambii membri ai inegalității (4) expresia

$$E=\frac{1}{4k+1}+\frac{1}{4k+2}+\frac{1}{4k+3}+\frac{1}{4k+4}-\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2},$$

și deducem astfel că inegalitatea

$$\frac{1}{2k+3}+\frac{1}{2k+4}+\ldots+\frac{1}{4k+4}\geq\frac{7}{12}+E, \tag{6}$$

este adevărată.

Pentru a demonstra, pe baza acestei ultime inegalități, că și (5) este adevărată, este suficient acum să arătăm că

$$\frac{7}{12}+E\ge\frac{7}{12}, \tag{7}$$

adică $E\ge 0$, ceea ce revine la a arăta că

$$\frac{1}{4k+1}+\frac{1}{4k+2}+\frac{1}{4k+3}+\frac{1}{4k+4}-\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}\ge 0,\ \text{pentru } k\ge 1. \tag{8}$$

Aceasta este echivalentă cu

$$\frac{1}{4k+1}+\left(\frac{1}{4k+2}-\frac{1}{2k+1}\right)+\frac{1}{4k+3}+\left(\frac{1}{4k+4}-\frac{1}{2k+2}\right)\ge 0$$

adică cu

$$\frac{1}{4k+1}-\frac{1}{4k+2}+\frac{1}{4k+3}-\frac{1}{4k+4}\ge 0$$

ceea ce revine la a arăta că $\frac{1}{4k+1}+\frac{1}{4k+3}\ge\frac{1}{4k+2}+\frac{1}{4k+4}$.

Efectuând calculele obţinem

$$(4k+3+4k+1)(4k+2)(4k+4)\ge(4k+4+4k+2)(4k+1)(4k+3)$$

adică

$$(8k+4)(4k+2)(4k+4)\ge(8k+6)(4k+1)(4k+3)\ \Leftrightarrow$$

$$128k^3+256k^2+160k+32\ge 128k^3+224k^2+120k+18,$$

evident adevărată.

Prin urmare, inegalitatea (7) este adevărată, şi atunci ţinând seama de (6), rezultă că şi (5) este adevărată.

Am demonstrat aşadar că dacă inegalitatea (3) este adevărată pentru $n=k$ atunci ea este adevărată şi pentru $n=k+1$.

Potrivit principiului inducţiei matematice, aceasta arată că (3) este adevărată pentru orice $n\in N^*$.

Observaţii. 1) Dacă în locul inegalităţii (3), ni s-ar cere să demonstrăm inegalitatea

$$\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+2}+\ldots+\frac{1}{6n}>\frac{3}{5} \tag{9}$$

([1], Problema 10.39, pag. 153)

sau inegalitatea

$$\frac{1}{4n+1}+\frac{1}{4n+2}+\ldots+\frac{1}{8n}>\frac{5}{8} \qquad (10)$$

([1], Problema 10.40, pag. 153)

sau inegalitatea mult mai "bogată" în termeni,

$$\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+2}+\ldots+\frac{1}{9n}>1, \qquad (11)$$

atunci expresia E ar conține foarte mulți termeni, astfel că nu ar mai fi posibil să urmăm calea descrisă anterior.

Spre exemplu, în cazul inegalității (8), inegalitatea $E>0$ ar conține $6+3=9$ termeni

$$\frac{1}{6k+1}+\frac{1}{6k+2}+\ldots+\frac{1}{6k+6}-\frac{1}{3k+1}-\frac{1}{3k+2}-\frac{1}{3k+3}>0, \qquad (12)$$

ş.a.m.d.

2) Este clar atunci că demonstrarea prin calcul direct, aplicată inegalității (8), nu poate fi urmată pentru celelalte inegalități de acest tip.

Putem însă observa cu ușurință că inegalitatea (8) se poate scrie sub forma echivalentă

$$\frac{1}{4k+1}+\frac{1}{4k+2}+\frac{1}{4k+3}+\frac{1}{4k+4}>\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}. \qquad (8')$$

Obținem acum ușor

$$\frac{1}{4k+1}+\frac{1}{4k+2}>\frac{1}{4k+2}+\frac{1}{4k+2}=2\cdot\frac{1}{4k+2}=\frac{1}{2k+1},$$

şi, respectiv,

$$\frac{1}{4k+3}+\frac{1}{4k+4}>\frac{1}{4k+4}+\frac{1}{4k+4}=2\cdot\frac{1}{4k+4}=\frac{1}{2k+2},$$

inegalități care prin însumare membru cu membru ne dau tocmai (8').

3) În cazul inegalității (9), care revine la a demonstra (12), avem în mod analog

$$\frac{1}{6k+1}+\frac{1}{6k+2}>2\cdot\frac{1}{6k+2}=\frac{1}{3k+1}$$

$$\frac{1}{6k+3}+\frac{1}{6k+4}>2\cdot\frac{1}{6k+4}=\frac{1}{3k+2}$$

şi

$$\frac{1}{6k+5}+\frac{1}{6k+6}>2\cdot\frac{1}{6k+6}=\frac{1}{3k+3},$$

care prin însumare ne dau tocmai inegalitatea (12).

Cu această perfecţionare, metoda inducţiei matematice, poate fi acum uşor aplicată la toate inegalităţile de tipul celor considerate în această lucrare. Având în vedere faptul că în nici una din lucrările consultate de noi, nu este prezentată metoda descrisă mai sus, ce constă în gruparea convenabilă a termenilor, credem că de-abia acum este justificată invitaţia adresată de autorii lucrărilor [1] şi [2]: " Se foloseşte metoda inducţiei matematice".

4) La o analiză mai atentă, metoda grupării termenilor poate fi aplicată direct, adică fără mijlocirea inducţiei matematice, la demonstrarea oricărei inegalităţi din această clasă. Să arătăm cum se demonstrează, spre exemplu, inegalitatea (1). În membrul stâng al acesteia avem $25n-(5n+1)+1=20n$ termeni, pe care îi grupăm câte $5n$ şi obţinem

$$\frac{1}{5n+1}+\frac{1}{5n+2}+\ldots+\frac{1}{10n}>5n\cdot\frac{1}{10n}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{10n+1}+\frac{1}{10n+2}+\ldots+\frac{1}{15n}>5n\cdot\frac{1}{15n}=\frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{15n+1}+\frac{1}{15n+2}+\ldots+\frac{1}{20n}>5n\cdot\frac{1}{20n}=\frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{20n+1}+\frac{1}{20n+2}+\ldots+\frac{1}{25n}>5n\cdot\frac{1}{25n}=\frac{1}{5},$$

care prin adunare ne dau că

$$\frac{1}{5n+1}+\frac{1}{5n+2}+\ldots+\frac{1}{25n}>\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$$

Inegalitatea (1) rezultă acum datorită faptului că

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{77}{60}\text{ şi }\frac{77}{60}>\frac{6}{5}\quad(\Leftrightarrow 385>360)$$

Observaţie. Demonstraţia anterioară arată că inegalitatea (1) poate fi întărită, punând $\frac{77}{60}$ în loc de $\frac{6}{5}$. Putem obţine o inegalitate şi mai tare dacă termenii din membrul stâng se grupează câte n şi evaluăm apoi suma obţinută în membrul drept, sumă care este egală cu

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{25}.$$

Dacă folosim aceeaşi tehnică pentru suma anterioară (fără a o evalua efectiv) obţinem

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{10}>5\cdot\frac{1}{10}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\ldots+\frac{1}{15}>5\cdot\frac{1}{15}=\frac{1}{3},$$

...ş.a.m.d., de unde rezultă uşor întărirea inegalităţii (1), cu $\frac{77}{60}$ în loc de $\frac{6}{5}$, căci

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{25}>\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{77}{60}$$

Recomandăm cititorului să abordeze - prin oricare dintre metodele descrise aici - şi celelalte inegalităţi prezentate anterior, cărora le alăturăm inegalitatea

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}>\frac{13}{24}$$

(Admitere în înv. superior, 1988)

şi

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{3n+1}>1.$$

([1], Problema 10.38, a), pag.153)

Nu vom încheia această notă înainte de a atrage atenţia cititorului că tehnica grupării termenilor constituie nu numai o metodă simplă de demonstrare a inegalităţilor de acest tip sau un accesoriu preţios al metodei inducţiei matematice când se aplică aceluiaşi tip de inegalităţi.

Tehnica grupării termenilor este de fapt o metodă prin care putem obține noi inegalități. Spre exemplu, pornind de la (10) rezultă, grupând câte n termeni,

$$\frac{1}{4n+1}+\frac{1}{4n+2}+\ldots+\frac{1}{16n}>n\cdot\left(\frac{1}{5n}+\frac{1}{6n}+\ldots+\frac{1}{16n}\right)=\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{16}$$

și, procedând analog,

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{16}>4\cdot\frac{1}{8}+4\cdot\frac{1}{12}+4\cdot\frac{1}{16}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{13}{12}$$

Am obținut astfel o inegalitate nouă

$$\frac{1}{4n+1}+\frac{1}{4n+2}+\ldots+\frac{1}{16n}>\frac{13}{12},\ n\in N^*.$$

Dacă luăm în membrul stâng mai puțini termeni, vom obține inegalitatea

$$\frac{1}{4n+1}+\frac{1}{4n+2}+\ldots+\frac{1}{12n}>\frac{5}{6},$$

ș.a.m.d.

Aceasta arată că, de multe ori descoperirea soluției unei probleme cunoscute, poate să conducă la descoperirea de probleme noi, dacă modul de abordare a problemei este unul creator, prin care fiecare argument, fiecare rezultat constituie pretext de explorare și investigare.

BIBLIOGRAFIE

1. **MILITARU, C.**, Exerciții și probleme pentru liceu și admiterea în facultate, *Editura ALUX*, București, 1992

2. **PÂRȘAN, L., LAZANU, C.**, Probleme de algebră și trigonometrie pentru elevii de liceu din clasele a IX-a și a X-a, *Editura FACLA*, Timișoara, 1983

A METHOD FOR PROVING INEQUALITIES WITH AND WITHOUT INDUCTION

Abstract. This paper gives a new unitary technique for proving inequalities of the form

$$\frac{1}{an+1}+\frac{1}{an+2}+\ldots+\frac{1}{bn}>c,$$

where $a,b\in\mathbb{N}^*$, $b>a$, and $c\in\mathbb{R}$.

This method can be directly applied or inserted in the induction process, in order to obtain a simple solution.

Finally, a way to obtain as much new inequalities of this type as we want is also illustrated.

Universitatea din Baia Mare
Str. Victoriei nr.76, 4800 Baia Mare
ROMÂNIA