Lucrările Seminarului de
CREATIVITATE MATEMATICĂ
Vol. 6 (1996-1997), 41-46

Dedicat celei de-a 35-a aniversări a Universităţii din Baia Mare

METODA IDENTIFICĂRII ÎN CALCULUL UNOR SUME

Gheorghe BOROICA

Punctul de plecare al acestui articol este problema 3 pagina 57 din [3]. Aceasta are următorul enunţ

Să se demonstreze că:

$$(*)\qquad C_n^0+C_n^3+C_n^6+\dots=\frac{1}{3}\left(2^n+2\cos\frac{n\pi}{3}\right)\quad \textit{unde}\quad n\in N^*$$

În demonstraţia din manualul de algebră de clasa a X-a se consideră $\varepsilon=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$ o rădăcină cubică complexă a unităţii şi apoi se înlocuieşte în formula lui Newton:

$$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\dots+C_n^nb^n$$

$a=1$, $b=1$, apoi $a=1$, $b=\varepsilon$, în sfârşit $a=1$, $b=\varepsilon^2$ *etc.*

În mod natural se pun următoarele întrebări:

1) De ce luăm tocmai valorile de mai sus pentru a şi b?

2) Ce valori luăm pentru a şi b în ipoteza că am dori să calculăm sume de acelaşi tip?

3) Nu există o metodă unitară pentru calcularea sumelor de tipul (*) ?

Încercăm să răspundem la aceste întrebări considerând câteva sume pe care dorim să le calculăm.

Problema 1. Calculați sumele:

$$S_1 = 1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \dots$$

$$S_2 = C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + \dots$$

$$S_3 = 1 - 3C_n^2 + 9C_n^4 - 27C_n^6 + \dots$$

$$S_4 = C_n^1 - 3C_n^3 + 9C_n^5 - \dots$$

$$S_5 = C_n^1 - \frac{1}{3}C_n^3 + \frac{1}{9}C_n^5 - \frac{1}{27}C_n^7 + \dots$$

$$S_6 = C_n^0 + C_n^4 + C_n^8 + \dots$$

$$S_7 = C_n^1 + C_n^5 + C_n^9 + \dots$$

$$S_8 = C_n^2 + C_n^6 + C_n^{10} + \dots$$

$$S_9 = C_n^3 + C_n^7 + C_n^{11} + \dots$$

Problema 2. Să se demonstreze că:

$$S_{10} = 3^{\frac{1}{2}}C_n^1 - 3^{\frac{3}{2}}C_n^3 + 3^{\frac{5}{2}}C_n^5 - 3^{\frac{7}{2}}C_n^7 + \dots = 2^n \sin\frac{n\pi}{3}$$

(problema O:655, Gazeta Matematică 7/1991)

Problema 3. Fie $p \in (0,\infty)$. Să se demonstreze că dacă n este un număr natural par atunci

a) $S_{11} = C_n^1 - \frac{1}{p}C_n^3 + \frac{1}{p^2}C_n^5 - \dots + (-1)^{\frac{n}{2}-1} \cdot \frac{1}{p^{\frac{n}{2}-1}} C_n^{n-1} = \sqrt{\frac{(p+1)^n}{p^{n-1}}}\sin\left(n \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{p}}\right)$

b) $S_{12} = C_n^0 - \frac{1}{p}C_n^2 + \frac{1}{p^2}C_n^4 - \dots + (-1)^{\frac{n}{2}} \cdot \frac{1}{p^{\frac{n}{2}}} C_n^{n} = \sqrt{\frac{(p+1)^n}{p^{n}}}\cos\left(n \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{p}}\right)$

(problema 22304* din Gazeta Matematică 3/1991)

Problema 4. Fie numerele: $a_n = 1 - C_n^3 + C_n^6 - \dots$

$$b_n = -C_n^1 + C_n^4 - C_n^7 + \dots$$

$$c_n = C_n^2 - C_n^5 + C_n^8 - \dots$$

Să se arate că pentru orice $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$ au loc egalitățile:

$$a_n^2+b_n^2+c_n^2-a_nb_n-b_nc_n-c_na_n=2^n$$

$$a_n^3+b_n^3+c_n^3-3a_nb_nc_n$$

(D. Miheț)

Problema 5. Fie numerele: $a_n=C_n^0+C_n^3+C_n^6+\dots$

$$b_n=C_n^1+C_n^4+C_n^7+\dots$$

$$c_n=C_n^2+C_n^5+C_n^8+\dots$$

Să se arate că $a_n^3+b_n^3+c_n^3-3a_nb_nc_n=2^n$ $(\forall)n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$

Pentru toate sumele considerate în problemele anterioare se poate considera dezvoltarea:

$$(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+C_n^3x^3+\dots+C_n^nx^n \qquad (1)$$

Comparăm această dezvoltare cu sumele $S_1, S_2, \dots, S_{12}$ pe care dorim să le calculăm și încercăm să-l identificăm pe x. Procedând astfel obținem:

$x^2=-1\Rightarrow x_1=i$, $x_2=-i$ pentru S_1 și S_2

$x^2=-3\Rightarrow x_1=\sqrt{3}\cdot i$, $x_2=-\sqrt{3}\cdot i$ pentru S_3 și S_4

$x^2=-\frac{1}{3}\Rightarrow x_1=\frac{\sqrt{3}}{3}i$, $x_2=-\frac{\sqrt{3}}{3}i$ pentru S_5

$x^4=1\Rightarrow x_1=1$, $x_2=-1$, $x_3=i$, $x_4=-i$ pentru S_6, S_7, S_8, S_9

$x^2=-3\Rightarrow x_1=\sqrt{3}\,i$, $x_2=-\sqrt{3}\,i$ pentru S_{10}

$x^2=-\frac{1}{p}\Rightarrow x_1=\frac{1}{\sqrt{p}}i$, $x_2=-\frac{1}{\sqrt{p}}i$ pentru S_{11} și S_{12}

După ce am identificat pe x, valorile obținute le înlocuim în (1).
Pentru sumele S_{11}, S_{12} din P3. obținem:

$$\left(1+\frac{1}{\sqrt{p}}i\right)^n=C_n^0+C_n^1\frac{1}{\sqrt{p}}i-C_n^2\frac{1}{p}-C_n^3\frac{1}{p\sqrt{p}}i+C_n^4\frac{1}{p^2}+\dots$$

$$\left(1-\frac{1}{\sqrt{p}}i\right)^n=C_n^0-C_n^1\frac{1}{\sqrt{p}}i-C_n^2\frac{1}{p}+C_n^3\frac{1}{p\sqrt{p}}i+C_n^4\frac{1}{p^2}+\ldots$$

Însumând ultimele două egalități obținem

$$\left(1+\frac{1}{\sqrt{p}}i\right)^n+\left(1-\frac{1}{\sqrt{p}}i\right)^n=2\left(C_n^0-\frac{1}{p}C_n^2+\frac{1}{p^2}C_n^4-\ldots+(-1)^{\frac{n}{2}}C_n^n\cdot\frac{1}{p^{\frac{n}{2}}}\right)=2S_{12}$$

și $\left(1+\frac{1}{\sqrt{p}}i\right)^n-\left(1-\frac{1}{\sqrt{p}}i\right)^n=\frac{2i}{\sqrt{p}}\cdot S_{11}$ (2)

În continuare scriem numărul complex $z=1+\frac{1}{\sqrt{p}}i$ sub formă trigonometrică $|z|=\sqrt{1+\frac{1}{p}}=\sqrt{\frac{p+1}{p}}$,

Deci $z=\sqrt{\frac{p+1}{p}}(\cos t+i\sin t)$, $\cos t=\sqrt{\frac{p}{p+1}}>0$; $\sin t=\frac{1}{\sqrt{p+1}}>0\rightarrow$

$t=arctg\left(\frac{1}{\sqrt{p}}\right)$

Din (2) folosind formula lui Moivre obținem:

$$\sqrt{\left(\frac{p+1}{p}\right)^n}(\cos nt+i\sin nt)+\sqrt{\left(\frac{p+1}{p}\right)^n}(\cos nt-i\sin nt)=2\cdot S_{12}$$

$\rightarrow$

$$\sqrt{\left(\frac{p+1}{p}\right)^n}(\cos nt+i\sin nt)-\sqrt{\left(\frac{p+1}{p}\right)^n}(\cos nt-i\sin nt)=\frac{2i}{\sqrt{p}}S_{11}$$

$\Rightarrow S_{12}=\sqrt{\left(\frac{p+1}{p}\right)^n}\cdot\cos nt$ și $S_{11}=\sqrt{\frac{(p+1)^n}{p^{n-1}}}\sin nt$

Pentru problema P4. identificând obținem:

$x^3=-1\leftrightarrow x_1=-1,\ x_2=\varepsilon,\ x_3=\bar{\varepsilon}$ cu $\varepsilon^2-\varepsilon+1=0,\ \varepsilon^3=-1$

Înlocuind în (1) obținem:

$$(1-\varepsilon)^n=a_n-\varepsilon\cdot b_n+\varepsilon^2\cdot c_n$$

$$(1+\bar{\varepsilon})^n=a_n-\bar{\varepsilon}\cdot b_n+\bar{\varepsilon}^2\cdot c_n$$

În speranța de a obține $a_n^2+b_n^2+c_n^2$ înmulțim cele două relații și rezultă

$$[(1+\varepsilon)(1+\bar{\varepsilon})]^n=a_n^2+b_n^2+c_n^2-a_nb_n(\varepsilon+\bar{\varepsilon})+a_nc_n(\varepsilon^2+\bar{\varepsilon}^2)-b_nc_n(\varepsilon\cdot\bar{\varepsilon}^2+\varepsilon^2\cdot\bar{\varepsilon})=$$

$$=3^n=a_n^2+b_n^2+c_n^2-a_nb_n-a_nc_n-b_nc_n \text{ iar}$$

$$a_n^3+b_n^3+c_n^3=(a_n+b_n+c_n)(a_n^2+b_n^2+c_n^2-a_nb_n-a_nc_n-b_nc_n)=0\cdot 3^n=0$$

Pentru problema P5. identificând obținem

$x^3=1 \Rightarrow x_1=1,\ x_2=\alpha,\ x_3=\bar{\alpha}$ cu $1+\alpha+\alpha^2=0,\ \alpha^3=1$

Procedând în mod analog ca mai sus avem

$\{(1+\varepsilon)(1+\bar{\varepsilon})\}^n=a_n^2+b_n^2+c_n^2-a_nb_n-a_nc_n-b_nc_n$, adică

$$1=a_n^2+b_n^2+c_n^2-a_nb_n-a_nc_n-b_nc_n$$

Observația 1. Metoda folosită aici permite tratarea unitară a problemelor de tipul celor analizate, și poate fi expusă cu destulă ușurință la nivelul elevilor de clasa a X-a

Observația 2. Acest mod de abordare în calculul unor sume permite calcularea sumelor coeficienților din dezvoltarea binomului $(1+x)^n$ luați din p în p. Pentru aceasta se poate consulta problema 79 pagina 242 din [2].

Observația 3. Utilizând dezvoltări de tipul $(1+x)^n$ cu x și n convenabil alese, operații de adunare și înmulțire cu expresii de acest tip sau operații de derivare și integrare a dezvoltării respective se pot obține diverse identități. Se poate vedea de exemplu problema T.18 pag 156 din [5] sau problema OIM 9 pag 278 din [5].

BIBLIOGRAFIE

1. * * * Gazeta Matematică 7/1991 şi 3/1991
2. COŞNIŢĂ,C., Probleme de algebră, *Editura Tehnică*, Bucureşti 1989
3. NĂSTĂSESCU,C., Algebra, Manual pentru clasa a X-a, *Editura Didactică şi Pedagogică*, Bucureşti, 1990
4. NĂSTĂSESCU,C., Exerciţii şi probleme de algebră, *Editura Didactică şi Pedagogică*, Bucureşti,1991
5. TEODORESCU,N., Probleme din Gazeta Matematică, *Editura Tehnică*, Bucureşti, 1989

THE METHOD OF IDENTIFICATION IN CALCULATING SOME SUMS

Abstract. The present article gives an unitary method to compute special sums of combinations and also suggests the possibility of obtaining some identities.

Colegiul "Gheorghe Şincai"
Str. Gheorghe Şincai nr. 25
4800 Baia Mare
ROMÂNIA