Lucrările Seminarului de
CREATIVITATE MATEMATICĂ
Vol.6 (1996-1997), 47-50

Dedicat celei de-a 35-a aniversări a Universității din Baia Mare

DESPRE FUNCȚII CU PROPRIETATEA LUI DARBOUX

Cristian HEUBERGER

Este cunoscută legătura semnificativă care există intre funcțiile continue pe un interval și funcțiile cu proprietatea lui Darboux pe acel interval.În acest sens reamintesc următoarele rezultate:

Teorema 1 *Orice funcție continuă pe un interval, are proprietatea lui Darboux (P.D.)*

Teorema 2 *Dacă x_0 e un punct de discontinuitate a unei funcții $f:I\to\mathbb{R}$ (I-interval) cu P.D.,atunci cel puțin una dintre limitele laterale ale lui f in x_0 nu există.*

Corolar 1 Punctele de discontinuitate ale unei funcții cu P.D. sunt de speța a doua.

Corolar 2 Dacă o funcție $f:I\to\mathbb{R}$ (I-interval) cu P.D. admite limite laterale in $x_0\in I$, atunci f e continuă in x_0.

Teorema 3 *Orice funcție monotonă care are P.D. este continuă.*

În manualul de liceu se dau exemple de funcții cu P.D. și care nu sunt continue intr-un punct.Pornind de la acestea, se pot da ușor exemple de funcții cu P.D. discontinue intr-un număr finit de puncte. Astfel spus, reciproca Teoremei 1 este falsă.

Evident se naşte întrebarea:
-Cât de numeroasă poate fi mulţimea punctelor de discontinuitate ale unei funcţii cu P.D.?

Lebesgue a dat un exemplu de funcţie ce are P.D. şi nu e continuă în nici un punct.

În continuare vom trata acest exemplu, uşor modificat.

Pentru aceasta vom considera scrierea binară a numerelor reale din $[0,1]$, acceptând doar pentru 1 scrierea $0,111\ldots1\ldots$.
Celelalte numere, acceptăm că nu au perioadă 1.
În acest caz, orice număr x din $[0,1]$ se poate scrie

$$x=0,a_1a_2a_3\ldots$$

unde $a_i\in\{0,1\}$, $\forall i\in\mathbb{N}^*$.

Mai mult, în afară de $x=1$, toate celelalte numere au o infinitate de 0 după virgulă, deoarece 1 nu poate fi perioadă.

Considerăm $f:[0,1]\to[0,1]$ unde pentru $x=0,a_1a_2a_3\ldots$, definim

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{dacă } \forall k\in\mathbb{N}^*, \text{ şirul } (a_{2n+1})_{n\geq k} \text{ nu e periodic}\\ 0,a_{2k}a_{2k+2}a_{2k+4}\ldots & \text{dacă şirul } (a_{2n-1})_{n\geq 1}\\ & \text{e periodic începând cu rangul } k.\end{cases}$$

Evident $f(0)=0$ şi $f(1)=1$.

Vom arăta că $\forall\alpha,\beta\in(0,1)$, $\alpha<\beta$ avem $f([\alpha,\beta])=[0,1]$.

Fie $m\in\mathbb{N}$ rangul primei cifre după virgulă care diferă în scrierea lui α şi β. Deoarece $\alpha<\beta$, această cifră va fi 0 la α şi 1 la β.
Adică

$$\alpha=0,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{m-1}0\ldots$$
$$\beta=0,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{m-1}1\ldots$$

Deoarece în scrierea lui α apar o infinitate de 0, α se poate scrie

$$\alpha = 0,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{m-1}0\underbrace{11\ldots1}_{p\ ori}0\ldots$$

Fie $y\in[0,1]$, $y=0,y_1y_2y_3\ldots$

unde $y_i\in\{0,1\}$, $\forall i\in\mathbb{N}^*$.

Alegem

$$x=0,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{m-1}0\underbrace{11\ldots1}_{p-1\ ori}\overbrace{1\ldots1}^{t\ ori}0y_10y_20y_3\ldots$$

unde $t\in\{1,2\}$ este în aşa fel ales încât y_1 să fie cifră după virgulă de rang par.

Sesizăm că gruparea de $(p+1)+t$ cifre 1 continue cel puţin două cifre şi deci cel puţin una e de rang impar. Rezultă că şirul cifrelor de rang impar este

$$\alpha_1,\alpha_3,\ldots,1,0,0,0,\ldots$$

Evident acest şir nu e periodic decât începând de unde e constant 0. În acest caz

$$f(x)=0,y_1y_2y_3\ldots=y$$

şi cum $\alpha=0,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{m-1}0\underbrace{11\ldots1}_{p\ ori}0\ldots$

$$x=0,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{m-1}0\underbrace{11\ldots1}_{p\ ori}1\ldots$$

$$\beta=0,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{m-1}1\ldots.$$

avem $x\in[\alpha,\beta]$.

Am obţinut $f([\alpha,\beta])=[0,1]$.

Este evident acum că f are P.D.

Deoarece $f([\alpha,\beta])=[0,1]$, $\forall\alpha,\beta\in[0,1]$, $\alpha<\beta$ rezultă că

$$\forall x_0\in[0,1],\ \forall V\in\mathcal{V}(x_0)\ \ f(V\cap[0,1])=[0,1]$$

ceea ce arată că f nu e continuă în nici un punct din domeniul de definiţie.

BIBLIOGRAFIE

1. **ARAMĂ L., MOROZAN T.**, Culegere de probleme de analiză matematică pentru bacalaureat şi admitere în învăţământul superior, *Editura Universal PAN*, Bucureşti, 1996
2. **GUSSI Gh., STĂNĂŞILĂ O., STOICA T.**, Matematică. Elemente de analiză matematică. Manual pentru clasa a XI-a, *Editura Didactică şi Pedagogică*, Bucureşti, 1989
3. **NICOLESCU M.**, Analiză matematică, vol.II, *Editura Tehnică*, Bucureşti, 1958

SUR LES FONCTIONS AVEC LA PROPRIETÉ DE DARBOUX

Resumé. Cet article a pour objet une présentation légérement modifiée (plus accessible) de l'exemple donné par Henri Lebesgue, d'une fonction qui a la proprieté de Darboux et qui n'est continue en aucun point de l'ensemble de départ.

Colegiul "Gheorghe Şincai"
Str.Gheorghe Şincai nr. 25
4800 Baia Mare
ROMÂNIA