Lucrările Seminarului de
CREATIVITATE MATEMATICĂ
Vol.6 (1996-1997), 51-54

Dedicat celei de-a 35-a aniversări a Universităţii din Baia Mare

CONSIDERAŢII ASUPRA GRUPURILOR FINITE

Dana HEUBERGER

În acest articol vom evidenţia câteva demonstraţii elementare ale unor proprietăţi mai puţin cunoscute de către elevii de liceu, referitoare la unele grupuri finite.

Propoziţia 1 *$(G,\cdot)$ grup finit astfel încât $\forall x\in G, x^2=e$. Atunci a) $(G,\cdot)$ grup abelian*

b) $ord(G)=2^k,\ k\in\mathbb{N}$

Demonstraţie a) Proprietatea a) este prezentată în manualul de clasa a XII-a şi e adevărată şi pentru grupuri care nu sunt finite.

b) G fiind grup abelian, se poate organiza ca $\mathbb{Z}_2$ -spaţiu vectorial astfel: $\begin{cases}\hat{0}\cdot x=e\\ \hat{1}\cdot x=x\end{cases}$

Se verifică foarte uşor faptul că sunt îndeplinite axiomele spaţiului vectorial.

Fie $\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ o bază a $\mathbb{Z}_2$ -spaţiului vectorial G.

$\Rightarrow \forall x\in G, \exists!\,\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in\mathbb{Z}_2$, a.î. $x=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\cdot x_i$, şi deci numărul elementelor grupului G este egal cu numărul funcţiilor ce se pot defini pe o mulţime cu n elemente, cu valori în $\mathbb{Z}_2$. Aşadar, $|G|=2^n$.

Observaţii 1. Demonstraţia punctului b) se mai poate face şi prin inducţie după $|G|$, considerând $x\in G-\{e\}$, $N=\langle x\rangle$ şi ţinând cont de faptul că $G|N$ are proprietatea din enunţ şi utilizând teorema lui Lagrange (in [1]).

2. Propoziţia se poate generaliza pentru grupuri cu $x^p=e$ pentru orice $x\in G$, cu p număr prim.
Vom enunţa fără demonstraţie, următorul rezultat important.

Teorema lui Cauchy *$(G,\cdot)$ grup de ordin n, p prim, p/n $\Rightarrow$ numărul soluţiilor ecuaţiei $x^p=1$ este kp, cu $k\in N^*$.*

Demonstraţia acestei teoreme, mai laborioasă, se găseşte în lucrarea [2].

Consecinţă a) $(G,\cdot)$ grup de ordin n, p prim, $p/n \Rightarrow$ $\exists\, a\in G$, $ord(a)=p$.

b) Numărul subgrupurilor de ordin p ale lui G este congruent cu $1 (mod\ p)$.

Teorema 2 *$(G,\cdot)$ grup ciclic de ordin $n \Rightarrow \forall q\in N$ cu q/n, $\exists!$ subgrup de ordin q al lui G.*

Demonstraţie $n=qr \Rightarrow |\langle a^r\rangle|=q$ (unde $G=\langle a\rangle$)

$|\langle a^k\rangle|=q \Rightarrow (a^k)^q=1 \Rightarrow kq=tn$ (cu $t\in N$)

$kq=t\cdot qr \Rightarrow k=tr \Rightarrow a^k=(a^r)^t\in\langle a^r\rangle \Rightarrow \langle a^k\rangle=\langle a^r\rangle \Rightarrow$ unicitatea.

Propoziţia 2 $p>2$, p prim $\Rightarrow \exists$ 2 tipuri de grupuri neizomorfe de ordin $n=2p$: Z_n şi grupul diedral $(D_p,\circ)$ al rotaţiilor şi simetriilor unui poligon regulat cu p laturi.

Demonstraţie

1) $\exists a\in G, ord(a)=n \Rightarrow G=\langle a\rangle \simeq Z_n$

2) $\forall a\in G, ord(a)\neq n \Rightarrow ord(a)\in\{2,p\}$ (teorema Lagrange)

$|G|=2p \overset{T.Cauchy}{\Rightarrow} \exists a\in G, ord(a)=p$

Demonstrăm că $\langle a\rangle$ este singurul subgrup de ordin p al lui G.
Presupunem că există

$b\in G, b\notin\langle a\rangle$, $ord(b)=p \Rightarrow G=\{e,a,\dots,a^{p-1},b,b^2,\dots,b^{p-1},c\}$

Dar $ab \notin \langle a \rangle$ şi $\left.\begin{array}{l} ab \notin \langle b \rangle \Rightarrow ab = c \\ \text{Analog} \Rightarrow a^2 b = c \end{array}\right\} \rightarrow ab = a^2 b \Rightarrow a = e$ fals

Deci $\forall b \in G - \langle a \rangle, ord(b) = 2$

Fie deci $b \in G - \langle a \rangle$ cu $ord(b) = 2 \rightarrow G = \{e, a, \ldots, a^{p-1}, b, ab, \ldots, a^{p-1}b\}$ (1)

$ord(b) = ord(ab) = \ldots = ord(a^{p-1}b) = 2$ şi $(ab)^2 = e \Rightarrow abab = e$.

Înmulţind această relaţie la stânga cu a^{p-1} şi la dreapta cu b, obţinem: $ba = a^{p-1}b \neq ab$ deci G este necomutativ.

Aşadar sunt exact două tipuri de grupuri de ordin $2p$:

$\mathbb{Z}_{2p}$ şi grupurile G de forma 1, care verifică relaţiile

$$\begin{cases} a^p = e \\ b^2 = e \\ ba = a^{p-1}b \end{cases} \qquad (2)$$

(cu ajutorul acestor relaţii rezultă în mod unic tabla operaţiei).

Cum $(D_p, \cdot)$ este grup de ordin $2p$, necomutativ, rezultă că grupurile de forma (1) (care verifică relaţiile (2)) sunt izomorfe cu $(D_p, \cdot)$.

Se poate demonstra uşor următoarea propoziţie:

Propoziţia 3 $(G, \cdot)$ grup

1) Dacă $\left.\begin{array}{l} a, b \in G \text{ cu } ab = ba \\ ord(a) = p \\ ord(b) = q \\ (p, q) = 1 \end{array}\right\} \rightarrow ord(ab) = pq$

2) $\left.\begin{array}{l} \text{reciproc, dacă } \alpha \in G \\ ord(\alpha) = p \cdot q \\ (p, q) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists!\, a, b \in G, ord(a) = p,\ ord(b) = q$ şi $ab = ba = \alpha$

Teorema 3 *p, q numere prime distincte $\rightarrow$ orice grup abelian de ordin $p \cdot q$ este ciclic.*

Demonstrație

$$\left.\begin{array}{l} ord(G)=p\cdot q \\ (p,q)=1 \end{array}\right\} \overset{T.\,Cauchy}{\Rightarrow} \left.\begin{array}{l} \exists a\in G,\ ord(a)=p \\ \exists b\in G,\ ord(b)=q \\ (p,q)=1 \end{array}\right\} \overset{Prop.1}{\rightarrow} ord(ab)=p\cdot q=ord(G) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G=\langle a\cdot b\rangle$$

BIBLIOGRAFIE

1. PURDEA, T., Asupra grupurilor finite, *Lucrările Seminarului de Didactica matematicii*, vol.5, 1988-1989, p.241-256,
2. ANDREI, Gh., CARAGEA, C., ENE, V., Algebră, Culegere de probleme pentru examene de admitere și olimpiade școlare

SUR L'ORDRE DE CERTAINS GROUPES FINIS

Resumé. Dans cet article, on donne les démonstrations élémentaires de quelques propriétés - moins connues par les élèves des lycée - concernant la structure de certains groupes finis, l'ordre d'un élément et l'ordre d'un sous-groupe d'un groupe fini.

Colegiul "Gheorghe Șincai"
Str. Gheorghe Șincai nr.25,
4800 Baia Mare
ROMÂNIA