Lucrările Seminarului de
CREATIVITATE MATEMATICĂ
Vol.6 (1996-1997), 55-56

Dedicat celei de-a 35-a aniversări a Universității din Baia Mare

ASUPRA UNEI PROBLEME DE CONCURS

Dana HEUBERGER

Problemă Să se arate că pentru p număr prim, $p>2$ numărul $N=(p+1)(p+2)\ldots p^2+p^p$ este divizibil cu p^{p+2}.

(Examen de gr.II, București, 1993)

Demonstrație $N=p^p\left[\dfrac{p^2!}{p!\,p^p}+1\right]=p^p\left[\dfrac{(p^2-1)!}{(p-1)!\,p^{p-1}}+1\right]$

Fie $A=\dfrac{(p^2-1)!}{(p-1)!\,p^{p-1}}+1$.

Demonstrăm că A este divizibil cu p^2, deci că în $\mathbb{Z}_{p^2}$, $\hat{A}=\hat{0}$.

Folosim următoarele leme:

Lema 1 *Produsul elementelor unui grup comutativ* $(G,\cdot)$ *este egal cu produsul elementelor sale de ordinul 2.*

Lema 2 *În inelul* $(\mathbb{Z}_{p^k},+,\cdot)$ $k\in\mathbb{N}^*$, *singurul element de ordinul 2 este* $-\hat{1}$. *(p număr prim; $p>2$)*

Demonstrație Lema 2 Fie $\hat{a}\in\mathbb{Z}_{p^k}$; $\hat{a}^2=\hat{1}\Rightarrow\widehat{a^2-1}=\hat{0}\Rightarrow$

$\Leftrightarrow p^k/(a-1)(a+1)\Rightarrow\exists t,s\geq 0,\ \begin{cases}p^t/a-1\\ p^s/a+1\end{cases}(s+t=k)$

Dacă $t\neq 0$ și $t\neq k\rightarrow\begin{cases}p/a-1\\ p/a+1\end{cases}\Rightarrow p/a+1-(a-1)\Rightarrow p/2$, fals, și deci

$t=0$ sau $t=k\rightarrow p^k/a+1$ sau $p^k/a-1$

$\rightarrow a+1=\alpha p^k\Rightarrow\hat{a}=-\hat{1}$, sau

$a-1=\beta p^{k} \Rightarrow \hat{a}=\hat{1}$, care are ordinul 1

Deci $\left.\begin{array}{l}\hat{a}^{2}=\hat{1}\\ \hat{a}\neq\hat{1}\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{a}=-\hat{1}$

Revenind la problemă:

$\hat{a}\in U(\mathbb{Z}_{p^2}) \Leftrightarrow (a,p^2)=1$

Deci elementele inversabile din $\mathbb{Z}_p^2$ sunt:

$$\hat{1},\hat{2},\ldots,\widehat{p-1},\widehat{p+1},\ldots,\widehat{2p-1},\widehat{2p+1},\ldots,\widehat{p^2-1}$$

$$\xRightarrow[\text{Lema 2}]{\text{Lema 1}} \hat{1}\cdot\hat{2}\ldots\widehat{p-1}\cdot\widehat{p+1}\ldots\widehat{2p-1}\cdot\widehat{2p+1}\ldots\widehat{p^2-1}=-\hat{1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\widehat{(p^2-1)!}}{1\cdot p\cdot 2p\ldots(p-1)p}=-\hat{1} \Leftrightarrow \frac{\widehat{(p^2-1)!}}{(p-1)!\,p^{p-1}}=-\hat{1} \Leftrightarrow \hat{A}=\hat{0}$$

$$\Leftrightarrow p^2/A \rightarrow p^{p-2}/N.$$

BIBLIOGRAFIE

1. **I.D.ION, N. RADU**, Algebra, Editura Didactică şi Pedagogică București, 1981
2. **I.D.,ION, N.RADU, C-TIN NIȚĂ, D.POPESCU**, Probleme de algebră, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981

SUR UN PROBLÈME DE CONCOURS

Resumé. Cet article concerne une démonstration utilisant l'anneau des classes résiduelles modulo n, $\mathbb{Z}_n$, du suivant problème de divisibilité:

Soit p un nombre premièr, $p>2$. Montrez que le nombre $N=(p+1)(p+2)\ldots p^2+p^A$ est divisible par p^{p-2}.

Colegiul "Gheorghe Şincai"
Str.Gheorghe Şincai nr. 25,
4800 Baia Mare
ROMÂNIA