Lucrările Seminarului de
CREATIVITATE MATEMATICĂ
Vol.6 (1996-1997), 57-62

Dedicat celei de-a 35-a aniversări a Universității din Baia Mare

CÂTEVA GENERALIZĂRI ALE PROBLEMEI NR.23523 DIN GAZETA MATEMATICĂ 4/1996

Lăcrimioara TANCU și Maria S. POP

În această notă ne propunem să dăm un exemplu de problemă a cărei soluție sugerează o interpretare geometrică și diverse generalizări ale ei; invităm în același timp cititorul să găsească alte eventuale interpretări și să studieze posibilitatea generalizării altor probleme din Gazeta Matematică, acest lucru constituind un exercițiu util pentru stimularea creativității.

În Gazeta Matematică [2] se propune elevilor clasei a X-a spre rezolvare următoarea problemă:

23523 Fie x, y, z numere complexe nenule astfel încât $x+y+z=0$ și $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$. Să se calculeze $x^n+y^n+z^n$, unde n este un număr natural care nu se divide cu 3.

(I.Cucurezeanu, Constanța)

O soluţie a acestei probleme este următoarea: din datele problemei rezultă că $x+y+z=0$ şi $xy+xz+yz=0$, deci x, y, z sunt rădăcinile ecuaţiei $t^3-a=0$, unde $a \in \mathbb{C}^*$ (în fapt $a=xyz$).

Cum $n=3q\pm1, q \in \mathbb{N}^*$ avem $t^n=a^q \cdot t^{\pm1}$, de unde deducem că

$x^n+y^n+z^n=a^q(x+y+z)$ sau $x^n+y^n+z^n=a^q\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$, adică în oricare situaţie avem $x^n+y^n+z^n=0$.

Observaţii 1. Dacă x, y, z sunt soluţiile ecuaţiei $t^3-a=0, a \in \mathbb{C}^*$, atunci $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$ sunt soluţiile ecuaţiei $at^3-1=0$. Din acest motiv, printr-un raţionament similar celui de mai sus, ajungem la concluzia că suma $\frac{1}{x^n}+\frac{1}{y^n}+\frac{1}{z^n}$ este de asemeni egală cu 0 pentru orice număr natural n care nu se divide cu 3.

2. Dacă x, y, z sunt soluţiile ecuaţiei $t^3-a=0, a \in \mathbb{C}^*$, atunci imaginile lor sunt, în planul complex, vârfurile unui triunghi echilateral înscris în cercul de rază $\sqrt[3]{|a|}$ şi de centru O. Problema admite deci următoarea reformulare:

Dacă x, y, z sunt trei numere complexe nenule ale căror imagini în planul complex sunt vârfurile unui triunghi echilateral cu centrul în O, atunci imaginile numerelor x^n, y^n, z^n (unde n este un număr întreg care nu se divide cu 3) sunt de asemeni vârfuri ale unui triunghi echilateral cu centrul în O.

Soluţia prezentată anterior împreună cu observaţiile ne sugerează următoarele generalizări:

I. Fie x, y, z numere complexe diferite de $a \in \mathbb{C}$ astfel încât

$x+y+z=3a$ şi $\frac{1}{x-a}+\frac{1}{y-a}+\frac{1}{z-a}=0$.

Să se calculeze $(x-a)^n+(y-a)^n+(z-a)^n$, unde n este un număr întreg care nu se divide cu 3.

II. Fie $a\in\mathbb{C}, b\in\mathbb{C}^*$ şi numerele complexe x, y, z diferite de $\frac{a}{b}$ astfel încât $b(x+y+z)=3a$ şi $\frac{1}{bx-a}+\frac{1}{by-a}+\frac{1}{bz-a}=0$.

Să se calculeze $(bx-a)^n+(by-a)^n+(bz-a)^n$, unde n este un număr întreg care nu se divide cu 3.

În fiecare dintre aceste cazuri problema se rezolvă în aceeaşi manieră cu problema iniţială apărută în Gazeta Matematică şi se obţine acelaşi rezultat.

Observaţie 3. Problema II admite următoarea reformulare: Dacă x, y, z sunt trei numere complexe ale căror imagini în planul complex sunt vârfurile unui triunghi echilateral, atunci imaginile numerelor x^n, y^n, z^n (unde n este un număr întreg care nu se divide cu 3) sunt de asemeni vârfuri ale unui triunghi echilateral.

III. Fie $m\in\mathbb{N}, m\geq 3$ şi $z_1, z_2, \ldots, z_m$ numere complexe nenule astfel încât:

$$\sum_{i=1}^{m} z_i=0, \sum_{i=1}^{m}\frac{1}{z_i}=0, \sum_{1\leq i<j\leq m}\frac{1}{z_i z_j}=0, \ldots, \sum_{1\leq i_1<i_2<\ldots<i_{m-1}\leq m}\frac{1}{z_{i_1}z_{i_2}\ldots z_{i_{m-1}}}=0.$$

Să se calculeze $z_1^n+z_2^n+\ldots+z_m^n$, unde n este un număr întreg care nu se divide cu m.

Soluţie: Relaţiile din ipoteză conduc la:

$$\sum_{i=1}^{m} z_i=0, \sum_{1\leq i<j\leq m} z_i z_j=0, \ldots, \sum_{1\leq i_1<i_2<\ldots<i_{m-1}\leq m} z_{i_1}z_{i_2}\ldots z_{i_{m-1}}=0,$$ de unde

rezultă că $z_1, z_2, \ldots, z_m$ sunt rădăcinile ecuaţiei $t^m-a=0$, unde $a\in\mathbb{C}^*$ (în fapt $a=(-1)^m z_1 z_2\ldots z_m$).

Cum $n=qm+r$, $q\in\mathbb{Z}$, $r\in\mathbb{N}$, $1\leq r\leq m-1$, avem $t^n=a^q\cdot t^r$, de unde deducem că $z_1^n+z_2^n+\ldots+z_m^n=a^q(z_1^r+z_2^r+\ldots+z_m^r)$. Problema revine deci la a calcula sumele de forma $z_1^r+z_2^r+\ldots+z_m^r$, $1\leq r\leq m-1$.

Ţinând seama însă de formulele lui Newton (vezi [1]):

$$P_k - s_1 P_{k-1} + s_2 P_{k-2} - \ldots + (-1)^{k-1} s_{k-1} P_1 + (-1)^k \cdot k \cdot s_k = 0$$

(unde $s_1, s_2, \ldots$ sunt sumele Viète iar $P_1, P_2, \ldots, P_k$ sunt polinoamele de forma $P_k = x_1^k + x_2^k + \ldots + x_m^k$)

şi de faptul că $s_1 = s_2 = \ldots = s_{m-1} = 0$, obţinem că $P_1 = P_2 = \ldots = P_{m-1} = 0$, adică $z_1^r + z_2^r + \ldots + z_m^r = 0$, pentru orice $r \in \{1, 2, \ldots, m-1\}$. Prin urmare $z_1^n + z_2^n + \ldots + z_m^n = 0$, pentru orice număr întreg n care nu se divide cu m.

Observaţie 4. Problema III poate fi reformulată astfel: Dacă $z_1, z_2, \ldots, z_m$ sunt numere complexe distincte ale căror imagini în planul complex sunt vârfurile unui poligon regulat, atunci imaginile numerelor $z_1^n, z_2^n, \ldots, z_m^n$ (unde n este un număr întreg care nu se divide cu m şi $m \neq 2 \cdot (m,n)$) sunt de asemeni vârfuri ale unui poligon regulat cu $\dfrac{m}{(m,n)}$ vârfuri (unde (m,n) este cel mai mare divizor comun al numerelor m şi n).

Într-adevăr, dacă $z^m = a$, $a \in \mathbb{C}^*$ şi $n = mq + r$; $1 \le r \le m-1$ atunci $|z_1| = \ldots = |z_m| = \sqrt[m]{|a|}$ iar $\arg z_{k+1} = \dfrac{\alpha + 2k\pi}{m}$; $k = 0, 1, \ldots, m$, deci

$\arg z_{k+1}^r = \dfrac{(\alpha + 2k\pi) r}{m} = \dfrac{(\alpha + 2k\pi) r'}{m'}$ unde $m = (m,n) m'$, $r = (m,n) r'$ şi $(r', m') = 1$.

Observăm că dacă $k \equiv p \pmod{m'}$ atunci

$\arg z_{k+1}^r = \arg z_{p+1}^r + 2\pi \dfrac{k-p}{m'}$ de unde, întrucât $\dfrac{k-p}{m'} \in \mathbb{Z}$, avem $z_{k+1}^r = z_{p+1}^r$ pentru toate perechile (k,p), $k \equiv p \pmod{m'}$,

$k, p \in \{0, 1, \dots, m-1\}$.

Deoarece există câte (m,n) puteri egale, avem distincte doar m' puteri toate având acelaşi modul; deci

$$\sum_{k=0}^{m-1} z_{k+1}^{n} = (m,n)\cdot\sum_{k=0}^{m'-1} z_{k+1}^{n'} = 0.$$

Mai general, cu o aceeaşi reformulare geometrică în planul complex, avem:

IV. Fie $a \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{C}^*$, $m \in \mathbb{N}$, $m > 3$ şi numerele complexe $z_1, z_2, \dots, z_m$, diferite de $\frac{a}{b}$, astfel încât:

$$b\cdot\sum_{i=1}^{m} z_i = ma \quad \text{şi} \quad \sum_{i=1}^{m}\frac{1}{(bz_i-a)} = 0,\ \sum_{1\le i<j\le m}\frac{1}{(bz_i-a)(bz_j-a)} = 0,$$

$$\dots,\ \sum_{1\le i_1<i_2<\dots<i_{m-1}\le m}\frac{1}{(bz_{i_1}-a)(bz_{i_2}-a)\dots(bz_{i_{m-1}}-a)} = 0.$$ Să se calculeze $(bz_1-a)^n+(bz_2-a)^n+\dots+(bz_m-a)^n$, unde n este un număr întreg care nu se divide cu m.

BIBLIOGRAFIE

1. PANAITOPOL, L., DRĂGHICESCU, I.C., Polinoame şi ecuaţii algebrice, *Editura Albatros*, Bucureşti, 1980, p.185-190
2. * * *, Gazeta Matematică, anul CI, nr. 4/ 1996

SOME GENERALIZATIONS OF PROBLEM no. 23523, G.M. 4/1996

Abstract. This note gives some generalizations of a problem published in "Gazeta Matematică": If x, y, z are three nonzero complex numbers such that $x+y+z=0$ and $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$, it is requested to calculate $x^n+y^n+z^n$, where n is a natural number non multiple of 3. (I.Cucurezeanu)

The reader is invited to make further generalizations of other interesting problems published in "Gazeta Matematică" or elsewhere, as an exercise for stimulating a creative spirit.

Universitatea din Baia Mare
Str. Victoriei nr. 76, 4800 Baia Mare
ROMÂNIA