Lucrările Seminarului de
CREATIVITATE MATEMATICĂ
Vol. 6 (1996-1997), 63-68

Dedicat celei de-a 35-a aniversări a Universității din Baia Mare

ÜBER DEN FUßBALL UND ÄHNLICHE POLYEDER

Ein Forschungsthema für die Mittelstufe der Gymnasien

Martin METTLER

1983 wurde in der Bundesrepublik Deutschland bei der 1. Runde im Bundeswettbewerb Mathematik folgende Aufgabe gestellt:

Die Oberfläche eines Fußballs setzt sich aus schwarzen Fünfecken und weißen Sechsecken zusammen. An die Seiten eines jeden Fünfecks grenzen lauter Sechsecke, während an die Seiten eines jeden Sechsecks abwechselnd Fünfecke und Sechsecke grenzen.

Man bestimme aus diesen Angaben für den Fußball die Anzahl seiner Fünfecke und seiner Sechsecke.

Anmerkung: Die Oberfläche des Fußballs kann als Polyeder aufgefaßt werden.

Lösung: Ist f die Anzahl der Fünfecksflächen, s die Anzahl der Sechsecksflächen, k die Anzahl der Kanten und e die Anzahl der Ecken dieses Polyeders, so gilt nach dem Euler'schen Polyedersatz:

$$e + f + s = k + 2. \qquad (1)$$

Da an jeder Polyederkante genau zwei Polyederflächen grenzen, ist die Summe der Seitenanzahlen aller Polyederflächen gleich der doppelten Kantenzahl. Also gilt:

$$5f + 6s = 2k \qquad (2)$$

Wir zählen nun die Paare (F, S), wobei F ein Polyederfünfeck und S ein Polyedersechseck ist, und beide eine gemeinsame Kante haben ("benachbart sind"), auf zwei Weisen ab.
Da zu jedem Fünfeck fünf "benachbarte Sechsecke", zu jedem Sechseck drei "benachbarte Fünfecke" gehören, gilt außerdem.

$$5f = 3s \tag{3}$$

Schließlich ergibt sich noch eine Bedingung aus folgender Eigenschaft eines Polyeders.
Von jeder Ecke gehen mindestens drei Kanten aus.
Andererseits besitzt jede Kante genau 2 Ecken als Endpunkte. $\Rightarrow \quad 2k \geq 3e$ (4)
Ersetzt man in (1) und (2) gemäß (3) den Wert 5f durch 3e, so erhält man

$$5e + 8s = 5k + 10$$

$$9s = 2k$$

Hieraus ergibt sich durch Elimination von s: $\quad 45e = 90 + 29k$ (5)

$\Rightarrow \quad 29k = 45(e-2) \quad \Rightarrow \quad k$ ist Vielfaches von 45 $\quad \Rightarrow \quad s = \frac{2}{9}k$ ist Vielfaches von 10.
Aus (4) und (5) folgt schließlich $k \geq 90$.
Ausgehend vom Minimalwert $k = 90$ erhält man durch schrittweises Einsetzen

$$f = 12, \qquad s = 20 \qquad \text{und} \qquad e = 60.$$

Weitere Fragen

Was geschieht nun, wenn wir anstatt der Fünf- und Sechsecke regelmäßige a- und b-Ecke nehmen? Wieviele Polyeder erhalten wir dann?
Zuerst formulieren wir einmal die **allgemeine Aufgabenstellung**:
Die Oberfläche eines Polyeders setzt sich aus regelmäßigen a- und b-Ecken zusammen.
An die Seiten eines jeden a-Ecks grenzen lauter b-Ecke, an die Seite eines b-Ecks *abwechselnd* a- und b-Ecke. (6)
Man bestimme die Anzahl der existierenden Polyeder und die jeweilige Anzahl der a- und b-Ecke.

Lösung:

Zunächst bemerken wir, daß $a, b \geq 3$ sein muß damit man überhaupt Vielecke erhält. (7)
Aus (6) folgt, daß b eine gerade Zahl sein muß. (8)
Seien nun α und β die Innenwinkel der a- und b-Ecke. Dann muß ebenfalls wegen (6) an jeder Ecke gelten:

$$\alpha + 2\beta < 360^\circ \tag{9}$$

Die Größe des Innenwinkels φ eines regulären p-Ecks hängt ja bekanntlich folgendermaßen von der Seitenzahl des p-Ecks ab:

$$\varphi = \frac{1}{p}(p-2)\cdot 180^\circ. \tag{10}$$

Aus (9) und (10)* $\Rightarrow \quad \frac{1}{a}(a-2)\cdot 180^\circ + \frac{2}{b}(b-2)\cdot 180^\circ < 360^\circ \quad \Leftrightarrow$

$$1-\frac{2}{a}+2-\frac{4}{b} < 2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{a}+\frac{2}{b} > \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 2b+4a > ab \quad \Leftrightarrow \quad a(b-4) < 2b \qquad (11)$$

Für $b = 4$, folgt aus (11) die allgemeingültige Aussage $0 < 8$, was bedeutet daß man in diesem Fall für a jede beliebige Zahl ≥ 3 einsetzen kann. Hier liegt eine triviale Form unseres Polyeders vor: Es besteht aus zwei a – Ecken als "Boden und Deckel" und darum gruppieren sich die Quadrate (das sind Prismen und Antiprismen)

Der Fall $b < 4$ ist wegen (7) und (8) unmöglich.

Für $b > 4$ folgt aus (11):

$$a < \frac{2b}{b-4} \qquad (12)$$

Wir setzen nun für b nacheinander 6, 8, 10, . . . ein, die Werte sind aus Tab.1 ersichtlich.

b	$\frac{2b}{b-4}$	a
4	∞	bel.
6	6	3
6	6	4
6	6	5
8	4	3
10	$3,\overline{3}$	3
12	3	/
14	2,8	/

Tab. 1

B	A	Polyeder
a	2	Prismen, Antiprismen
4	4	Tetraederstumpf
8	6	Oktaederstumpf
20	12	Ikosaederstumpf (Fußball)
6	8	Würfelstumpf
12	20	Dodekaederstumpf
/	/	/
/	/	/

Tab. 2

Lassen wir b immer größer werden, erhalten wir für $\frac{2b}{b-4}$ immer kleinere Werte und damit auch keine zugehörigen a – Ecke mehr.

Aus wievielen a – und b – Ecken besteht jedes dieser Polyeder ?

Dazu nehmen wir am Ende der folgenden Überlegungen den **Euler'schen Polyedersatz** zu Hilfe: Es seien A die Anzahl der a – und B die Anzahl der b – Ecke. An ein a – Eck grenzen a b – Ecke. An ein b – Eck grenzen aber $\frac{b}{2}$ a – Ecke.

Zu einem a – Eck gehören also $1 : \frac{b}{2} = \frac{2}{b}$ eines b – Ecks, und da an ein a – Eck a b – Ecke grenzen, gilt also $\frac{2a}{b}A = B$. Daraus folgt für die Anzahl F der Flächen des Polyeders, daß

$$F = A + B = A + \frac{2a}{b}A, \qquad \text{also} \qquad F = A\left(1+\frac{2a}{b}\right) \qquad (13)$$

An jede Ecke muß genau ein a – Eck grenzen, da ansonsten die Bedingungen der Aufgabenstellung verletzt würden. Das bedeutet, daß die Anzahl der Ecken $E = a \cdot A$ ist. (14)

Die Kanten des Polyeders kann man in zwei Klassen einteilen:

a) solche, die zu einem a - Eck und einem b - Eck gehören. Deren Anzahl ist a A.

b) solche, die zu zwei b - Ecken gehören. Diese müssen ihre Enden an je zwei verschiedenen a - Ecken haben. Daher ist ihre Anzahl $\frac{1}{2}a \cdot A$ an der Zahl.

Also ist die Anzahl der Kanten desPolyeders: $K = a\,A + \frac{1}{2}a\,A = \frac{3}{2}a\,A$ (15)

Wir setzten nun (13), (14) und (15) in den Polyedersatz $E + F = K + 2$ ein und erhalten:

$$a\,A + A\left(1 + \frac{2a}{b}\right) = \frac{3}{2}a\,A + 2 \quad \Leftrightarrow \quad A\left(a + 1 + \frac{2a}{b} - \frac{3}{2}a\right) = 2 \quad \Leftrightarrow \quad A\left(\frac{4-b}{2b}a + 1\right) = 2 \quad \Leftrightarrow$$

$$A = \frac{2}{\frac{4-b}{2b}a + 1} = \frac{4b}{4a - ab + 2b} \quad \Rightarrow \quad B = \frac{2a}{b} \cdot \frac{4b}{4 - ab + 2b} = \frac{8a}{4a - ab + 2b}$$

In die entstandenen Gleichungen setzen wir nun nacheinander die Werte aus Tab.1 ein und erhalten so Tab. 2.

Unser Problem führt zu einer Unterklasse der halbregulären Körper.

Die halbregulären Körper setzen sich aus zwei oder drei Arten von gleichseitigen Vielecken zusammen. Alle Kanten eines solchen Körpers sind gleichlang, und es stoßen gleichviele Kanten in jeder Ecke zusammen. Es gibt genau 13 halbreguläre Körper, wenn man von den trivialen und unendlich viele Prismen und Antiprismen absieht (s. Abb. 2).

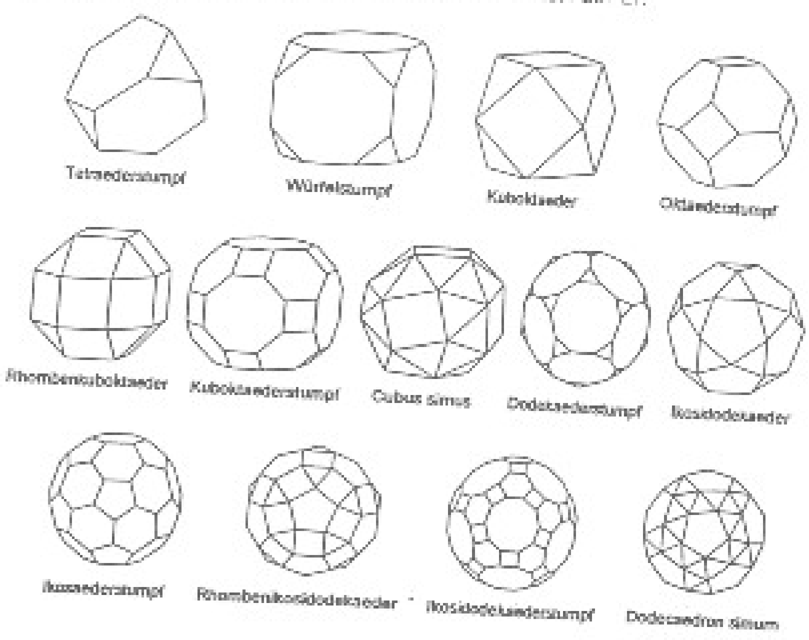

Abb. 2

Die nichttrivialen 13 halbregulären Körper werden archimedische Körper genannt, da sie schon **Archimedes** (287 - 212 v. Chr.) gekannt haben soll, dessen Unterlagen jedoch bei dem großen Brand von Alexandria verloren gegangen sind.
Auch **Pappos** (um 300 n. Chr.) beschäftigte sich mit diesen Körpern.
Johannes Kepler (1571 - 1630) stellte diese Körper als erster zeichnerisch dar. Er teilte diese Körper sehr anschaulich in drei "Familien" ein und hob damit gleichzeitig ihre "Verwandschaft" zu den fünf platonischen Körpern Tetraeder, Kubus, Oktaeder, Dodekaeder und Ikosaeder) hervor. Die eine Familie mit dem Würfel als Vater und dem Oktaeder als Mutter hat die sechs Kinder: Würfelstumpf, Kuboktaeder, Oktaederstumpf, Rhombenkuboktaeder, Kuboktaederstumpf und Cubus simus. Bis auf den letzten lassen sich all diese Körper durch geeignetes Abschneiden von Ecken bzw. von Ecken und Kanten jeweils aus den beiden platonischen Körpern gebildet werden (s. Abb. 3).

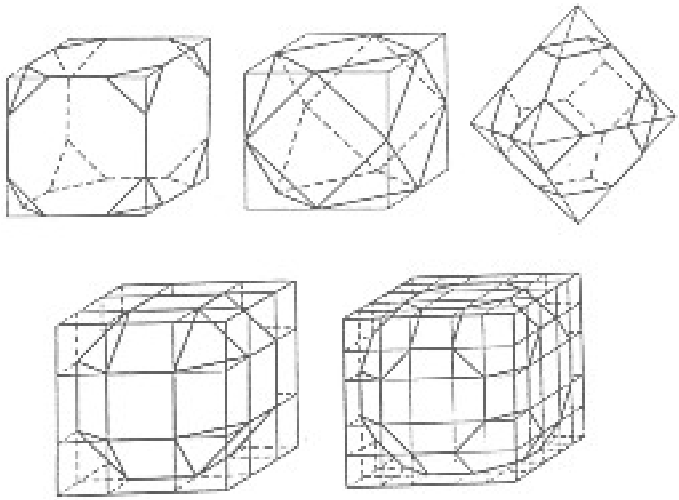

Abb. 3

Die zweite Familie mit dem Dodekaeder als Vater und dem Ikosaeder als Mutter hat auch sechs Kinder: Dodekaederstumpf, Ikosidodekaeder, Ikosaederstumpf Rhombenikosidodekaeder und Dodekaedron simum (s. Abb. 4).
Eine Außenseiterrolle nimmt das Tetraeder ein, da es keinen "Partner" und nur ein "Kind" hat (s. Abb. 4).

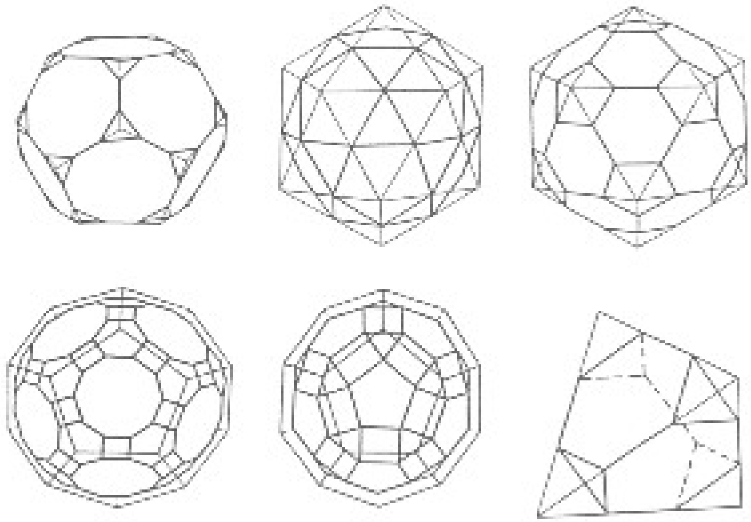

Abb. 4

Bibliographie:

Jens Leiich. Über den Fußball und ähnliche Polyeder, MONOID, Jg. 3, Heft 2, 1983, S. 1

Armin Herzer: Über halbreguläre Körper, MONOID 43, S. 12

A. Beutelspacher: Mathematik zum Anfassen, Justus - liebig - Universität Giessen

P. Adam, A. Wyss: Platonische und Archimedische Korper, ihre Sternformen und polaren Gebilde. Verlag Freies Geistesleben Stuttgart 1984, ISBN 3-258-03345-5.

Miyazaki: Polyeder und Kosmos, Braunschweig 1987

Anschrift des Autors:

Martin Mettler

Unterer Kurweg 29

D - 67316 Carlsberg

Germany