Lucrările Seminarului de
CREATIVITATE MATEMAICĂ
Vol. 7 (1997-1998), 1-2

ASUPRA UNEI INEGALITĂŢI CONDIŢIONATE

Dan BĂRBOSU şi Ioana TAŞCU

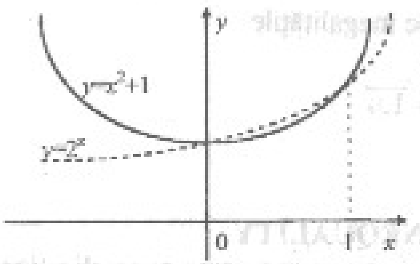
Scopul acestei note este de a prezenta soluţiile unor inegalităţi condiţionate, publicate în Gazeta Matematică.

Ideea de demonstraţie este conţinută în următoarea lemă.

Lemă. *Dacă $x \in [0,1]$, are loc inegalitatea*

$$2^x \geq x^2 + 1$$

Demonstraţie. Problema este propusă la clasele IX-X, din acest motiv alegem o demonstraţie grafică a inegalităţii. Reprezentăm cele două funcţii $y=2^x$, respectiv $y=x^2+1$ în acelaşi sistem de coordonate.



Se observă că pentru $x \in [0,1]$ avem

$$2^x \geq x^2+1$$

Aplicaţia 1. Să se arate că, dacă $x^2+y^2=1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, are loc inegalitatea

$$2^x + 2^y \geq 3$$

Soluţie. Din condiţiile $x \geq 0$, $y \geq 0$ şi $x^2+y^2=1$ se deduce că $x \in [0,1]$, $y \in [0,1]$ şi aplicând lema avem

$$2^x \geq x^2+1; \quad 2^y \geq y^2+1$$

Însumând relaţiile obţinem

$$2^x + 2^y \geq x^2 + y^2 + 2 = 3$$

Aplicația 2. Să se demonstreze dacă $x^2+y^2+z^2=1$ cu $x \geq 0,\ y > 0,\ z \geq 0,$ atunci are loc inegalitatea

$$2^x + 2^y + 2^z \geq 4$$

Soluție. Condiția $x^2+y^2+z^2 \leq 1$ ne situează în bila unitate, deci x∈[0,1], y∈[0,1] și z∈[0,1]. Aplicând lema avem

$$2^x \geq x^2+1;\ 2^y \geq y^2+1;\ 2^z \geq y^2+1$$

Însumând relațiile termen cu termen obținem $2^x+2^y+2^z \geq x^2+y^2+z^2+3=4$.

Aplicația 3. (Generalizare) Să se demonstreze că dacă avem $x_1, x_2, \ldots, x_n$ cu $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1,\quad x_i \geq 0,\quad \forall i = \overline{1,n}$, atunci are loc inegalitatea

$$\sum_{i=1}^{n} 2^{x_i} \geq n+1.$$

Soluție. Ca și în soluția de la aplicația 2, din condițiile enunțului rezultă că $x_i \in [0,1],\ (\forall)\ i = \overline{1,n}$. Conform lemei, au loc inegalitățile

$$2^{x_i} \geq x_i^2+1,\ (\forall)\ i = \overline{1,n}$$

care însumate conduc la concluzia enunțului.

ON A CONDITIONED INEQUALITY

Abstract. A solution to a conditioned inequality is given and some generalizations of this inequality are presented.

BIBLIOGRAFIE

*** Colecția Gazeta Matematică 1995-1996

Universitatea de Nord din Baia Mare
Catedra de Matematică și Informatică
Str. Victoriei 76, 4800 Baia Mare
ROMANIA
E-mail: dbarbosu@univer.ubm.ro
itascu@univer.ubm.ro

Primit la 15.08.1997