Lucrările Seminarului de
CREATIVITATE MATEMATICĂ
Vol. 7 (1997-1998), 3-4

ÎN LEGĂTURĂ CU RĂDĂCINILE DE ORDINUL n ALE UNITĂŢII

Dan BĂRBOSU şi Ioana ZELINA

În această notă vom rezolva o problemă propusă la etapa judeţeană a concursului de matematică, ediţia 1997, care nu a primit nici o soluţie corectă în concurs.

Notăm prin $U_n = \{ z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1 \} = \{ \varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1} \}$ mulţimea rădăcinilor de ordin n ale unităţii, unde $n \in \mathbb{N}^*$. Se ştie că dacă $\varepsilon_i \in U_n$ $(i = \overline{0,n-1})$, atunci $\varepsilon_i^k \in U_k$ $(\forall)\, k \in \mathbb{N}$. De asemenea $|\varepsilon_i| = 1$ $(\forall)\, i = \overline{0,n-1}$, ceea ce înseamnă că punctele M_i de afixe ε_i $(i = \overline{0,n-1})$ se găsesc pe cercul unitate.

Problemă. Fie n un număr natural impar şi ε o rădăcină nereală de ordinul n a unităţii. Considerând mulţimea

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z - \varepsilon^k| \le 1 \,,\, k\ \overline{0,n-1} \right\}$$

să se arate că $|z| \le 1$, $(\forall)\, z \in A$ şi să se determine mulţimea A.

Soluţie. Fie $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ fixat şi $D_k = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z - \varepsilon^k| \le 1 \right\}$.

Evident $A = \bigcap_{k=0}^{n-1} D_k$. Să observăm că D_k este discul de rază 1 cu centrul în punctul M_k de afix ε^k. Intersecţia discurilor D_k este originea sistemului de axe, prin urmare

$$A = \bigcap_{k=0}^{n-1} D_k = \{0\}.$$

Afirmaţia $|z| \le 1$ pentru orice $z \in A$ acum este evidentă.

Pentru această afirmaţie se poate da şi o altă demonstraţie, după cum urmează. Deoarece ε este o rădăcină nereală de ordin impar a unităţii, avem $1+\varepsilon+\ldots+\varepsilon^{n-1}=0$. Atunci, $(\forall)\ z\in\mathbb{C}$ avem

$$nz = nz-(1+\varepsilon+\ldots+\varepsilon^{n-1}) = (z-1)+(z-\varepsilon)+\ldots+(z-\varepsilon^{n-1})$$

$$n\cdot|z| = |(z-1)+(z-\varepsilon)+\ldots+(z-\varepsilon^{n-1})| \le |z-1|+|z-\varepsilon|+\ldots+|z-\varepsilon^{n-1}|$$

Dacă $z\in A$, din definiţia mulţimii A şi din inegalitatea precedentă rezultă că

$$n\cdot|z| \le n \text{ şi deci } |z|\le 1\ .$$

Pentru n = 3 problema discutată se reduce la [3].

ON THE n-TH ORDER ROOTS OF THE UNITY

Abstract. We discuss the following competition problem regarding the n-th order roots of the unity, proposed by the first author:

Let n be an odd positive integer and ε be a root of n-th order of the unity. Consider the set

$$A=\left\{z\in\mathbb{C}\ \middle|\ |z-\varepsilon^k|\le 1 \quad \text{for any} \quad k=\overline{0,n-1}\right\}.$$

Prove that for any $z\in A$ one has $|z|\le 1$ and determine the set A.

BIBLIOGRAFIE

1. BĂRBOSU, D., Problemă propusă la etapa judeţeană a concursului de matematică, Maramureş 1997, clasa a X-a

2. COŢA, A., ş.a., Matematică, Geometrie şi trigonometrie, manual pentru clasa a X-a, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti 1988

3. * * * Problemă dată la etapa judeţeană a concursului de matematică, Satu Mare 1996, clasa a X-a

Universitatea de Nord din Baia Mare
Catedra de Matematică şi Informatică
Str. Victoriei 76, 4800 Baia Mare
ROMANIA
E-mail: dbarbosu@univer.ubm.ro
zelina@univer.ubm.ro

Primit la 10.08.1997