Lucrările Seminarului de
CREATIVITATE MATEMATICĂ
Vol.7 (1997-1998), 5-12

ŞIRURI ŞI FUNCŢII DE TIP LALESCU

D.M.BĂTINEŢU-GIURGIU şi Maria BĂTINEŢU-GIURGIU

În lucrarea [1] a fost introdus conceptul de şir Lalescu iar în [2] au fost definite funcţiile *Euler-Lalescu* arătând printre altele că

$$\lim_{x\to\infty}\left((\Gamma(x+2))^{\frac{1}{x+1}}-(\Gamma(x+1))^{\frac{1}{x}}\right)=\frac{1}{e} \tag{1}$$

unde $\Gamma:(0,\infty)\to(0,\infty)$, $\Gamma(x)=\int_0^\infty t^{x-1}\cdot e^{-t}\,dt$ este funcţia lui *Euler* de speţa a doua.

În articolul de faţă ne propunem să extindem unele dintre aceste rezultate şi pentru aceasta notăm $\mathscr{F}(\mathbb{R}_+^*)=\left\{f\mid f:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}_+^*\right\}$.

Definiţia 1. Fie $a\in\mathbb{R}_+^*$. Spunem că funcţia $f\in\mathscr{F}(\mathbb{R}_+^*)$ este o a-funcţie *Lalescu* de tipul 1, dacă există

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x+1)}{x\cdot f(x)}=a \quad \text{şi există} \quad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\cdot\left(f(x)\right)^{\frac{1}{x}}\right).$$

Definiţia 2. Fie $a \in \mathbb{R}_+^*$. Spunem că funcţia $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}_+^*)$ este o a-funcţie *Lalescu* de tipul 2, dacă există

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x \cdot f(x+1)}{f(x)} = a \quad \text{şi există} \quad \lim_{x\to\infty} \left(x \cdot \left(f(x) \right)^{\frac{1}{x}} \right).$$

Defniţia 3. Fie $a \in \mathbb{R}_+^*$. Spunem că funcţia $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}_+^*)$ este o a-funcţie *Lalescu* de tipul 3, dacă există

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} = a \quad \text{şi există} \quad \lim_{x\to\infty} \left(f(x) \right)^{\frac{1}{x}}.$$

În legătură cu aceste concepte definite mai sus vom demonstra unele propoziţii şi teoreme care scot în evidenţă proprietăţi importante ale acestor concepte.

Propoziţia 1. *Dacă* $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}_+^*)$ *este o a-funcţie Lalescu de tipul 1, atunci*

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x} \cdot \left(f(x) \right)^{\frac{1}{x}} \right) = a \cdot e^{-1}.$$

Demonstraţie. Deoarece există $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x} \cdot \left(f(x) \right)^{\frac{1}{x}} \right) = b$, atunci

$$b = \lim_{\substack{n\to\infty \\ n\in\mathbb{N}^*}} \left(\frac{1}{n} \cdot \left(f(n) \right)^{\frac{1}{n}} \right) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{f(n)}{n^n}}$$

de unde aplicând criteriul raportului deducem că

$$b = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{f(n+1)}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{f(n)} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{f(n+1)}{n \cdot f(n)} \cdot \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n+1} \right) = a \cdot e^{-1}.$$

Propoziţia 2. *Dacă* $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}_+^*)$ *este o a-funcţie Lalescu de tipul 2, atunci*

$$\lim_{x\to\infty} \left(x \cdot \left(f(x) \right)^{\frac{1}{x}} \right) = a \cdot e.$$

Demonstrație. Deoarece există $d = \lim_{x\to\infty}\left(x\cdot(f(x))^{\frac{1}{x}}\right)$, avem

$$d = \lim_{\substack{n\to\infty \\ n\in\mathbb{N}^*}} \left(n\cdot f(n)\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^n\cdot f(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}\cdot f(n+1)}{n^n\cdot f(n)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n\cdot f(n+1)}{f(n)}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}\right) = a\cdot e\,.$$

Propoziția 3. *Dacă* $f\in\mathscr{F}(\mathbb{R}_+^*)$ *este o a-funcție Lalescu de tipul 3,*

atunci

$$\lim_{x\to\infty}\left(f(x)\right)^{\frac{1}{x}} = a\,.$$

Demonstrație. Deoarece există $t = \lim_{x\to\infty}\left(f(x)\right)^{\frac{1}{x}}$, avem

$$t = \lim_{\substack{n\to\infty \\ n\in\mathbb{N}^*}} \left(f(n)\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{f(n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{f(n+1)}{f(n)} = a\,.$$

Teorema 1. *Dacă* $f\in\mathscr{F}(\mathbb{R}_+^*)$ *este o a-funcție Lalescu de tipul 1, atunci*

$$\lim_{x\to\infty}\left(\left(f(x+1)\right)^{\frac{1}{x+1}} - \left(f(x)\right)^{\frac{1}{x}}\right) = a\cdot e^{-1}. \tag{2}$$

Demonstrație. Fie $B(x) = \left(f(x+1)\right)^{\frac{1}{x+1}} - \left(f(x)\right)^{\frac{1}{x}} = \left(f(x)\right)^{\frac{1}{x}}\left(u(x)-1\right)$,

unde
$$u(x) = \left(f(x+1)\right)^{\frac{1}{x+1}}\cdot\left(f(x)\right)^{-\frac{1}{x}}.$$

Este evident că

$$\lim_{x\to\infty} u(x) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\left(f(x+1)\right)^{\frac{1}{x+1}}}{x+1}\cdot\frac{x}{\left(f(x)\right)^{\frac{1}{x}}}\cdot\frac{x+1}{x}\right) = a\cdot e^{-1}\cdot e\cdot a^{-1}\cdot 1 = 1$$

şi atunci $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{u(x)-1}{\ln u(x)} = 1$. Prin urmare

$$B(x) = (f(x))^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{u(x)-1}{\ln u(x)} \cdot \ln u(x) = \frac{1}{x} \cdot (f(x))^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{u(x)-1}{\ln u(x)} \cdot \ln (u(x))^{x}$$

de unde deducem că

$$\lim_{x\to\infty} B(x) = a\cdot e^{-1}\cdot 1\cdot \ln\left(\lim_{x\to\infty} (u(x))^{x}\right) = a\cdot e^{-1}\cdot \ln\left(\lim_{x\to\infty} \frac{(f(x+1))^{\frac{x}{x+1}}}{f(x)}\right) =$$

$$= a\cdot e^{-1}\cdot \ln\left(\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x+1)}{x\cdot f(x)}\cdot \frac{x+1}{(f(x+1))^{\frac{1}{x+1}}}\cdot \frac{x}{x+1}\right)\right) = a\cdot e^{-1}\cdot \ln\left(a\cdot a^{-1}\cdot e\cdot 1\right) =$$

$$= a\cdot e^{-1}\cdot \ln e = a\cdot e^{-1}.$$

Teorema 2. *Dacă* $f\in \mathscr{F}(\mathbb{R}_+^*)$ *este o a-funcţie Lalescu de tipul 2, atunci*

$$\lim_{x\to\infty}\left((x+1)^2 (f(x+1))^{\frac{1}{x+1}} - x^2\cdot (f(x))^{\frac{1}{x}}\right) = a\cdot e. \tag{3}$$

Demonstraţie. Fie

$$D(x) = (x+1)^2\left(f(x+1)\right)^{\frac{1}{x+1}} - x^2\cdot\left(f(x)\right)^{\frac{1}{x}} = x^2\left(f(x)\right)^{\frac{1}{x}}(v(x)-1)$$

unde

$$v(x) = (x+1)^2\left(f(x+1)\right)^{\frac{1}{x+1}}\cdot\left(x^2 (f(x))^{\frac{1}{x}}\right)^{-1}.$$

Este evident că

$$\lim_{x\to\infty} v(x)=\lim_{x\to\infty}\left(\left(\frac{x+1}{x}\right)^2\cdot\frac{(f(x+1))^{\frac{1}{x+1}}}{(f(x))^{\frac{1}{x}}}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x+1)(f(x+1))^{\frac{1}{x+1}}}{x\cdot(f(x))^{\frac{1}{x}}}\cdot\frac{x+1}{x+1}\right)=\frac{a\cdot e}{a\cdot e}\cdot 1=1$$

şi atunci $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{v(x)-1}{\ln v(x)}=1$. Prin urmare

$$D(x)=x^2(f(x))^{\frac{1}{x}}(v(x)-1)=x^2(f(x))^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{v(x)-1}{\ln v(x)}\cdot\ln v(x)=$$

$$=x\cdot(f(x))^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{v(x)-1}{\ln v(x)}\cdot\ln(v(x))^x$$

de unde deducem că

$$\lim_{x\to\infty} D(x)=\lim_{x\to\infty}\left(x(f(x))^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{v(x)-1}{\ln v(x)}\cdot\ln\left(\left(\frac{x+1}{x}\right)^{2x}\cdot\frac{(f(x+1))^{\frac{x}{x+1}}}{f(x)}\right)\right)=$$

$$=a\cdot e\cdot 1\cdot\ln\left(\lim_{x\to\infty}\left(\left(\frac{x+1}{x}\right)^{2x}\frac{f(x+1)}{f(x)}\cdot(f(x+1))^{-\frac{1}{x+1}}\right)\right)=$$

$$=a\cdot e\cdot\ln\left(\lim_{x\to\infty}\left(\left(\frac{x+1}{x}\right)^{2x-1}\cdot\frac{xf(x+1)}{f(x)}\cdot\left((x+1)(f(x+1))^{-\frac{1}{x+1}}\right)\right)\right)=$$

$$=a\cdot e\cdot\ln\left(e^2\cdot a\cdot(ae)^{-1}\right)=a\cdot e\cdot\ln e=a\cdot e\,.$$

Teorema 3. *Dacă* $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+^*)$ *este o a-funcţie Lalescu de tipul 3, atunci*

$$(4) \qquad \lim_{x\to\infty}\left((x+1)\cdot\left(f(x+1)\right)^{\frac{1}{x+1}} - x\cdot\left(f(x)\right)^{\frac{1}{x}}\right) = a .$$

Demonstraţie. Fie

$$E(x) = (x+1)\cdot\left(f(x+1)\right)^{\frac{1}{x+1}} - x\cdot\left(f(x)\right)^{\frac{1}{x}} = x\cdot\left(f(x)\right)^{\frac{1}{x}}(w(x)-1)$$

unde

$$w(x) = \frac{x+1}{x}\cdot\left(f(x+1)\right)^{\frac{1}{x+1}}\cdot\left(f(x)\right)^{-\frac{1}{x}}$$

cu $\lim_{x\to\infty} w(x) = 1$. Prin urmare

$$E(x) = x\cdot\left(f(x)\right)^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{w(x)-1}{\ln w(x)}\cdot\ln w(x) = \left(f(x)\right)^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{w(x)-1}{\ln w(x)}\cdot\ln\left(w(x)\right)^x$$

şi atunci

$$\lim_{x\to\infty} E(x) = a\cdot 1\cdot\ln\left(\lim_{x\to\infty}\left(w(x)\right)^x\right) = a\cdot\ln\left(\lim_{x\to\infty}\left(\left(\frac{x+1}{x}\right)^x\cdot\frac{f(x+1)}{f(x)}\cdot\left(f(x+1)\right)^{-\frac{1}{x+1}}\right)\right) =$$

$$= a\cdot\ln\left(e\cdot a\cdot a^{-1}\right) = a\cdot\ln e = a .$$

Cazuri particulare. **1.** Dacă în Definiţia 1 luăm $f(x) = \Gamma(x+1)$ atunci $a = 1$, $b = e^{-1}$ şi astfel din Teorema 1 obţinem rezultatul (1). În particular

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ n\in\mathbb{N}^*}}\left(\left(\Gamma(n+2)\right)^{\frac{1}{n+1}} - \left(\Gamma(n+1)\right)^{\frac{1}{n}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n+1]{(n+1)!} - \sqrt[n]{n!}\right) = e^{-1}$$

adică am obţinut limita şirului lui *Traian Lalescu*.

2. Dacă în Definiţia 2 luăm $f(x)=\left(\Gamma(x+1)\right)^{-1}$ atunci $a=1$, $d=e$ şi astfel din Teorema 2 obţinem

(5) $$\lim_{x\to\infty}\left((x+1)^2\left(\Gamma(x+2)\right)^{-\frac{1}{x+1}}-x^2\left(\Gamma(x+1)\right)^{-\frac{1}{x}}\right)=e\ .$$

În particular

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ n\in N^*}}\left((n+1)^2\left(\Gamma(n+2)\right)^{-\frac{1}{n+1}}-n^2\left(\Gamma(n+1)\right)^{-\frac{1}{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^2}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}-\frac{n^2}{\sqrt[n]{n!}}\right)=e$$

adică am obţinut limita şirului *Bătineţu-Giurgiu.*

3. Dacă în Definiţia 3 luăm $f(x)=x$, atunci $a=1$ şi astfel din Teorema 3 deducem că

(6) $$\lim_{x\to\infty}\left((x+1)\cdot\left((x+1)\right)^{\frac{1}{x+1}}-x\cdot x^{\frac{1}{x}}\right)=1\ .$$

În particular

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ n\in N^*}}\left((n+1)\cdot(n+1)^{\frac{1}{n+1}}-n\cdot n^{\frac{1}{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left((n+1)\sqrt[n+1]{n+1}-n\sqrt[n]{n}\right)=1$$

adică am obţinut limita şirului *R. T. Ianculescu* (Gazeta Matematică, anul 1914).

SEQUENCES AND FUNCTIONS OF LALESCU TYPE

Abstract. In this note we give generalizations of *Euler-Ioachimescu* functions. Then we extend the concept of *Lalescu* sequence.

BIBLIOGRAFIE

1. **BĂTINEŢU-GIURGIU, D. M.,** Şiruri Lalescu, R.M.T. **XX**(1989), 37-38
2. **BĂTINEŢU-GIURGIU, D. M.,** Şirurile Lalescu şi funcţia lui Euler de speţa a doua. Funcţii Euler-Lalescu, G.M. Seria Metodică (1990), 21-26
3. **BĂTINEŢU-GIURGIU, D. M., ŢENA, M.,** Asupra unor clase de limite de şiruri, R.M.G. (1990), 15-20

Liceul "Matei Basarab"
Str. Matei Basarab 32
Bucureşti 70496
ROMÂNIA

Academia Tehnică Militară
Catedra de Matematică
B-dul George Coşbuc 81-83
Bucureşti 75275
ROMÂNIA

Primit la 1.11.1997