Lucrările Seminarului de
CREATIVITATE MATEMATICĂ
Vol 7 (1997 -1998), 21-28

UN CRITERIU DE MĂSURABILITATE DE TIP CLEŞTE

Vasile BERINDE

Această notă are un caracter predominant metodic şi doreşte să evidenţieze rolul important al analogiei ca instrument didactic în predarea unor capitole de analiză reală. Pe lângă meritul lor pur didactic, observaţiile noastre vin să ilustreze încă o dată - dacă era cazul - caracterul unitar al legilor ce guvernează lumea obiectelor matematice. De această dată, aşa cum arată şi titlul, este vorba de principiul "cleştelui", binecunoscut studenţilor încă din clasa a XI-a. Vom arăta că un criteriu de măsurabilitate a mulţimilor, întâlnit de obicei sub forma unor exerciţii de seminar la disciplina "Funcţii reale şi teoria măsurii" şi asimilat destul de greu de studenţi, nu este altceva decât un criteriu de tip cleşte. Dăm apoi o formă mai generală a acestui criteriu, care este de fapt exerciţiul 162, pag.154 din [3].

Vom reaminti câteva noţiuni necesare construirii cadrului în care vom formula aceste criterii, noţiuni şi rezultate care pot fi găsite în orice curs de analiză reală pentru studenţi [1], [2], [4], [5].

DEFINIŢIA 1. Fie X o mulţime numită spaţiu şi $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$ o familie de părţi ale lui X. Familia $\mathscr{A}$ este **σ-algebră** dacă

$$(A_1) \quad A, B \in \mathscr{A} \rightarrow A \setminus B \in \mathscr{A};$$

$$(A_2) \quad A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots \in \mathscr{A} \rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{A};$$

$$(A_3) \quad X \in \mathscr{A}.$$

Perechea (X, $\mathscr{A}$) se numeşte **spaţiu măsurabil**.

DEFINIŢIA 2. Fie (X, $\mathscr{A}$) un spaţiu măsurabil. O funcţie $\mu : \mathscr{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ se numeşte **măsură pozitivă** pe $\mathscr{A}$ dacă sunt îndeplinite condiţiile

(m_1) $\mu(\varnothing) = 0$;

(m_2) μ este σ-aditivă, adică pentru orice familie de mulţimi disjuncte două câte două, $(A_n) \subset \mathscr{A}$ avem

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) .$$

Dacă μ este o măsură pozitivă atunci tripletul (X, $\mathscr{A}$, μ) formează un **spaţiu cu măsură**. O măsură $\mu : \mathscr{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ este completă dacă pentru orice $A \in \mathscr{A}$ cu $\mu(A) = 0$ şi orice $B \subset A$, avem $B \in \mathscr{A}$.

PROPOZIŢIA 1. Dacă μ este o măsură pe $\mathscr{A}$ atunci

(i) μ este monotonă, adică $A, B \in \mathscr{A},\ A \subset B \Rightarrow \mu(A) \le \mu(B)$;

(ii) μ este substractivă, adică $A, B \in \mathscr{A},\ A \subset B$ şi $\mu(A) < \infty \Rightarrow$

$$\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$$

(iii) μ este σ-subaditivă, adică $(A_n) \subset \mathscr{A} \Rightarrow$

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) .$$

DEFINIŢIA 3. O funcţie $\mu^* : \mathscr{P}(X) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ se numeşte **măsură exterioară** (pe X) dacă

(e_1) $\mu^*(\emptyset) = 0$; (e_2) μ^* este **monotonă**;

(e_3) μ^* este σ-subaditivă.

Observaţie. Orice măsură pe σ-algebra $\mathscr{A} = \mathscr{P}(X)$ este o măsură exterioară, dar nu şi reciproc.

DEFINIŢIA 4. Fie $\mu^* : \mathscr{P}(X) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ o măsură exterioară. O mulţime $A \subset X$ se numeşte **μ^* – măsurabilă** dacă este satisfăcută condiţia lui Carathéodory:

$$\mu^*(M) = \mu^*(M \cap A) + \mu^*(M \cap C(A)),\ \forall\ M \in \mathscr{P}(X).$$

PROPOZIŢIA 2. Fie $\mu^* : \mathscr{P}(X) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ o măsură exterioară. Atunci

(i) Familia mulţimilor μ^* – măsurabile, $\mathscr{M}_{\mu^*}$, este o σ-algebră de părţi ale lui X;

(ii) $\mu^* \big| \mathscr{M}_{\mu^*}$ este o normă pe $\mathscr{M}_{\mu^*}$;

(iii) Măsura $\mu = \mu^* \big| \mathscr{M}_{\mu^*}$ este o măsură completă.

Observaţie. Măsura $\mu = \mu^* \big| \mathscr{M}_{\mu^*}$ se numeşte **măsură indusă** de măsura exterioară μ^*.

Fiind dată o mulţime $A \in \mathscr{P}(X)$, se pune problema de a studia măsurabilitatea ei, adică de a stabili dacă A aparţine sau nu σ-algebrei $\mathscr{M}_{\mu^*}$. O primă modalitate de a aborda această problemă este (ca în multe alte situaţii, dintre care amintim aici doar pe aceea a studierii convergenţei şirurilor de numere reale) de a aplica direct definiţia, adică de a arăta că este satisfăcută condiţia lui Carathéodory.

Ca şi în cazul şirurilor, această abordare nu este întotdeauna cea mai comodă din punct de vedere practic sau, chiar dacă dă rezultate, ea nu este îndrăgită de studenţi care, în marea lor majoritate, preferă **criteriile** în locul definiţiei. Un astfel de criteriu de măsurabilitate este dat în următoarea propoziţie.

PROPOZIŢIA 3. Fie $\mu^* : \mathscr{P}(X) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ o măsură exterioară şi $\mu : \mathcal{M}_{\mu^*} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ măsura indusă de μ^*. O mulţime $E \in \mathscr{P}(X)$ cu $\mu^*(E) < \infty$ este μ^* − măsurabilă dacă şi numai dacă există

$$A, B \in \mathcal{M}_{\mu^*} \text{ cu } A \subset E \subset B$$

şi

$$\mu(A) = \mu(B) < \infty .$$

Demonstraţie. ***Suficienţa.*** Din $A \subset E$ şi $E \subset B$ rezultă $E \setminus A \subset B \setminus A$.

Cum $A, B \in \mathcal{M}_{\mu^*}$, rezultă $B \setminus A \in \mathcal{M}_{\mu^*}$, deci $\mu^*(B \setminus A) = \mu(B \setminus A)$. Din faptul că μ este substractivă rezultă

$$\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A) = 0 ,$$

căci $\mu(A) < \infty$. Aşadar $B \setminus A \in \mathcal{M}_{\mu^*}$, $\mu(B \setminus A) = 0$ şi $E \setminus A \subset B \setminus A$,

deci, având în vedere că μ este măsură completă, rezultă că $E \setminus A \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ şi, în particular, că $\mu(E \setminus A) = 0$. Datorită faptului că A şi $E \setminus A \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ şi că $E = A \cup (E \setminus A)$, rezultă acum $E \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ aşadar E este μ^* − măsurabilă şi $\mu(E) = \mu(A) = \mu(B)$.

Necesitatea. Fie E măsurabilă şi $\mu(E) < \infty$. Condiţiile din enunţ se realizează pentru $A = B = E$. Propoziţia este complet demonstrată.

Observație. Este foarte natural să botezăm propoziția 3, *"criteriul cleștelui de măsurabilitate"* căci, în partea de suficiență, acesta arată că, dacă mulțimea E este *"încadrată"* de două mulțimi măsurabile A,B care au aceeași măsură (finită), atunci și E este măsurabilă și are măsura egală cu măsura comună a celor două mulțimi A și B.

Prin enunțul său, acest rezultat este analog criteriului cleștelui de la șiruri de numere reale:

Dacă (x_n) *este un șir pentru care există șirurile convergente* $(a_n),(b_n)$ *astfel încât*

(i) $a_n \le x_n \le b_n \quad (n > K,\ K\ \ fixat)$;

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = l$,

atunci (x_n) *este convergent și* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$.

Corespondența care realizează această analogie este dată în tabelul de mai jos.

ȘIRURI	TEORIA MĂSURII
șir	mulțime
convergență	măsurabilitate
$\lim x_n$	$\mu(E)$
$\le$	$\subset$

Această analogie aruncă o rază de lumină foarte interesantă asupra șirurilor: șirurile convergente sunt acele șiruri care pot fi "măsurate" în comportamentul lor, "măsura" lor fiind tocmai limita acestora, ș.a.m.d.

Dăm, în încheiere, o extindere a propoziției 3.

PROPOZIȚIA 4. ([3], Ex.162, pag. 154). Fie $\mu^* : \mathscr{P}(X) \to \overline{\mathbb{R}}$ o măsură exterioară și $\mu : \mathcal{M}_{\mu^*} \to \overline{\mathbb{R}}$, măsura indusă de μ^*. Atunci $E \subset \mathscr{P}(X)$ este μ^* - măsurabilă dacă și numai dacă $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ A, B \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ astfel încât

$$A \subset E \subset B$$

și

$$\mu(B \setminus A) < \varepsilon .$$

Demonstrație. *Necesitatea* este evidentă: dacă A este măsurabilă, atunci luând $A = B = E$ avem $\mu(B \setminus A) = \mu(\emptyset) = 0 < \varepsilon$, pentru orice $\varepsilon > 0$.

Suficiența. Fie $\varepsilon = \frac{1}{n}$. Atunci, pentru $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, există $A_n, B_n \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ astfel încât

$$A_n \subset E \subset B_n \quad \text{și} \quad \mu(B_n \setminus A_n) \le \frac{1}{n} .$$

Fie $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ și $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$. Cum $\mathcal{M}_{\mu^*}$ este σ-algebră, rezultă că $A, B \in \mathcal{M}_{\mu^*}$. În plus, $A \subset E \subset B$. Dar $B \setminus A \subset B_n \setminus A_n$, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, și cum μ este monotonă rezultă că

$$\mu(B \setminus A) \le \mu(B_n \setminus A_n) < \frac{1}{n}, \quad \forall\ n \in \mathbb{N},$$

ceea ce conduce prin trecere la limită, la concluzia că

$$\mu(B \setminus A) = 0 .$$

Ca şi în demonstraţia propoziţiei 3, din faptul că μ este completă, rezultă acum uşor $E \in \mathcal{M}_{\mu}$.

Observaţie. Putem acum să formulăm un analog al propoziţiei 4 pentru şirurile de numere: un şir (x_n) de numere reale este convergent dacă şi numai dacă $\forall \varepsilon > 0$, $\exists (a_n), (b_n)$ convergente astfel încât $a_n \le x_n \le b_n$, $n \ge k$ (k fixat) şi $\lim_{n \to \infty} (b_n - a_n) < \varepsilon$.

Acesta constituie o întărire a criteriului cleştelui.

BIBLIOGRAFIE

[1] **BERINDE, V.**, *Funcţii reale şi teoria măsurii*, Universitatea din Baia Mare, 1996

[2] **BERINDE, V.**, *Analiză reală*, Editura CUB PRESS 22, Baia Mare, 1997

[3] **CRĂCIUN, C. V.**, *Exerciţii şi probleme de analiză matematică*, Universitatea din Bucureşti, 1984

[4] **PRECUPANU, A.**, *Analiză matematică. Funcţii reale*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1976

[5] **PREDA, P.**, *Analiză reală*, Universitatea din Timişoara, 1991

[6] **ŞABAC, M.**, *Lecţii de analiză reală. Capitole de teoria măsurii şi integralei*, Universitatea din Bucureşti, 1982

A TONGS-TYPE CRITERION FOR MEASURABILITY

Abstract. The main goal of the paper is to reveal the analogy between a criterion for measurability in abstract real analysis and the well-known "tongs" criterion for numerical sequences.

Universitatea de Nord din Baia Mare
Catedra de Matematică şi Informatică
Str. Victoriei 76, 4800 Baia Mare
ROMANIA
E-mail: vberinde@univer.ubm.ro

Primit la 1.12.1997