Lucrările Seminarului de
CREATIVITATE MATEMATICĂ
Vol 7 (1997-1998), 29-38

OBSERVAŢII PRIVIND INTRODUCEREA NOŢIUNII DE σ-ALGEBRĂ ŞI DE COMPLETATĂ A UNEI σ-ALGEBRE

Vasile BERINDE

Domeniul cel mai adecvat pe care poate fi definită noţiunea de **măsură pozitivă** - noţiune fundamentală în analiza reală - este cel de familie de mulţimi având structura de **σ-algebră**. Sistemul de condiţii (echivalente) prin care se defineşte această ultimă noţiune în cursurile de analiză reală (a se vedea, bunăoară, [1],[2],[4],[5]) diferă de la un autor la altul. Dăm în continuare două astfel de definiţii echivalente, prima luată din [4] şi a doua din [5].

DEFINIŢIA 1. Spunem că familia nevidă $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$ este **o σ-algebră** dacă îndeplineşte condiţiile

$$(A_1) \quad A, B \in \mathscr{A} \Rightarrow A \setminus B \in \mathscr{A};$$

$$(A_2) \quad (A_n)_{n\in \mathbb{N}} \subset \mathscr{A} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{A};$$

$$(A_3) \quad X \in \mathscr{A}.$$

DEFINIŢIA 1'. Fie $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$ o mulţime nevidă. Mulţimea $\mathscr{A}$ se zice că este o **σ-algebră** de părţi ale lui X, dacă îndeplineşte condiţia

$$(A_2) \text{ şi } (A_4) \ A \in \mathscr{A} \Rightarrow C(A) \in \mathscr{A}.$$

Este uşor de arătat că cele două definiţii sunt echivalente.

Într-adevăr, dacă luăm $A := X$ şi $B := A$, din (A_1) rezultă (A_4), aşadar definiţia 1 implică definiţia 1'. Reciproc, dacă $\mathscr{A}$ este o σ-algebră în sensul definiţiei 1', atunci din faptul că $\mathscr{A}$ este nevidă, rezultă că există $A \in \mathscr{A}$. Aşadar, pe baza condiţiei (A_4) rezultă $C(A) \in \mathscr{A}$ şi aplicând (A_2) cu

$A_1 = A$, $A_2 = C(A)$, $A_n = \varnothing$, $n \geq 3$, rezultă $A \cup C(A) = X \in \mathscr{A}$, adică are loc

(A_3). Cum $A_1 \cup A_2 \in \mathscr{A}$, pentru orice $A_1, A_2 \in \mathscr{A}$, aplicând (A_4) deducem că şi

$$A_1 \cap A_2 = C(C(A_1) \cup C(A_2)) \in \mathscr{A},$$

prin urmare, din $A, B \in \mathscr{A}$, rezultă $A \cap C(B) = A \setminus B \in \mathscr{A}$, adică are loc condiţia (A_1).

Opţiunea pentru o anumită definiţie are consecinţe metodologice imediate: uşurarea înţelegerii ei de către studenţi, simplificarea unor demonstraţii, etc.
În cursul nostru [1] am ales definiţia 1, mult mai explicită şi deci mai accesibilă studenţilor deşi, mai târziu, la introducerea noţiunii de completată a unei măsuri (şi a unei σ-algebre) pot apărea unele dificultăţi calculatorii, aşa cum vom arăta în continuare.

Fie aşadar un spaţiu cu măsură $(X, \mathscr{A}, \mu)$ ceea ce înseamnă că $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$ este o σ-algebră iar $\mu : \mathscr{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ este o **măsură pozitivă**, adică o funcţie de mulţime care satisface condiţiile

(m_1) $\mu(\varnothing) = 0$;

(m_2) $(A_n) \subset \mathscr{A}$, $A_n \cap A_m = \varnothing$ pentru $n \neq m \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

O măsură $\mu : \mathscr{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ se numeşte **completă** dacă pentru orice mulţime

$A \in \mathscr{A}$ cu $\mu(A) = 0$, $B \subset A$ implică $B \in \mathscr{A}$.

Cu alte cuvinte, o măsură este completă dacă orice submulţime a unei mulţimi măsurabile de măsură nulă este la rândul ei măsurabilă.

Se ştie că măsura indusă de o măsură exterioară este o măsură completă şi că prelungirea Carathéodory a unei măsuri definită pe o algebră $\mathscr{C}$, la σ-algebra generată de $\mathscr{C}$ nu este în general o măsură completă.
(Problema prelungirii unei măsuri definite pe o algebră se pune imperios la construirea pe $\mathbb{R}$ a măsurii Lebesgue, pornind de la familia intervalelor semiînchise la dreapta, căci această familie, reunită cu mulţimea vidă, formează doar o **algebră**

de părţi ale lui $\mathbb{R}$ şi nu o σ-algebră).

Procedeul de prelungire a unei măsuri incomplete $\mu : \mathscr{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$, până la o măsură completă, presupune construirea mai întâi a completatei σ-algebrei $\mathscr{A}$, pe care va fi apoi definită prelungirea (completata) măsurii μ.
Există cel puţin două procedee de definire a completatei unei σ-algebre $\mathscr{A}$, cel corespunzător definiţiei 1[4] şi respectiv definiţiei 1'[5]. În cursul nostru [1], am combinat definiţia cea mai simplă a σ-algebrei, definiţia 1, preluată din [4], cu procedeul de construire a completatei din [5], procedeu care ni s-a părut mai interesant, căci este similar criteriului de măsurabilitate de tip cleşte discutat în [3], chiar dacă acesta nu este atât de sugestiv ca procedeul dat în [4].

Dăm mai întâi procedeul bazat pe definiţia 1.

TEOREMA 1. ([5], Teorema 1.3.4.). *Fie $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un spaţiu cu măsură şi*

$$\hat{\mathscr{A}} = \left\{ E \subset X \;\middle|\; \exists\, A, B \in \mathscr{A},\ A \subset E \subset B,\ \mu(B \setminus A) = 0 \right\}. \tag{1}$$

Atunci

(i) $\hat{\mathscr{A}}$ este o σ-algebră de părţi ale lui X care conţine pe $\mathscr{A}$;

(ii) Aplicaţia $\hat{\mu} : \hat{\mathscr{A}} \to \overline{\mathbb{R}}_+$, dată prin

$$\hat{\mu}(E) = \mu(A),\ \forall\, A \in \mathscr{A}, \tag{2}$$

este o măsură completă.

Demonstraţia 1.(i) Fie $A \in \mathscr{A}$. Atunci $A \subset A \subset A$ şi

$\mu(A \setminus A) = \mu(\emptyset) = 0$, deci, pe baza definiţiei, $A \in \hat{\mathscr{A}}$. Aşadar $\mathscr{A} \subset \hat{\mathscr{A}}$.

Fie $E \in \hat{\mathscr{A}}$. Atunci, din (1) rezultă că există $A, B \in \mathscr{A}$ astfel încât $A \subset E \subset B$

şi $\mu(B \setminus A) = 0$, ceea ce conduce la $C(B) \subset C(E) \subset C(A)$ şi

$\mu(C(A) \setminus C(B)) = \mu(C(A) \cap B) = \mu(B \setminus A) = 0$, adică $C(E) \in \hat{\mathscr{A}}$.

Condiţia (A_4) este satisfăcută.

Fie acum $E_n \in \hat{\mathscr{A}}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Rezultă că există $A_n, B_n \in \mathscr{A}$ astfel încât

$$A_n \subset E_n \subset B_n \text{ şi } \mu(B_n \setminus A_n) = 0,\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*.$$

Dacă notăm $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, atunci $A, B \in \mathscr{A}$ şi

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subset B .$$

Pe de altă parte, din relaţia $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (B_n \setminus A_n)$, folosind monotonia şi σ-subaditivitatea măsurii rezultă

$$\mu(B \setminus A) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \le \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (B_n \setminus A_n)\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n \setminus A_n) = 0 ,$$

deci $\mu(B \setminus A) = 0$, ceea ce înseamnă că $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \hat{\mathscr{A}}$, deci este satisfăcută şi condiţia (A_2). Cum $\hat{\mathscr{A}} \supset \mathscr{A}$ şi $\mathscr{A}$ este nevidă, căci $\emptyset, X \in \mathscr{A}$, rezultă că $\hat{\mathscr{A}}$ este o σ-algebră.

(ii) Demonstrăm mai întâi că funcţia $\hat{\mu}$ este corect definită, adică $\hat{\mu}(E)$ nu depinde de alegerea mulţimii A în (2). Presupunem că $A, B, A_1, B_1 \in \mathscr{A}$ astfel încât

$$A \subset E \subset B,\ A_1 \subset E \subset B_1 \quad \text{şi} \quad \mu(B \setminus A) = \mu(B_1 \setminus A_1) = 0 .$$

Deoarece

$$A \setminus A_1 \subset B_1 \setminus A_1 \quad \text{şi} \quad A_1 \setminus A \subset B \setminus A ,$$

rezultă că $0 \le \mu(A \setminus A_1) \le \mu(B_1 \setminus A_1) = 0$, deci $\mu(A \setminus A_1) = 0$ şi, analog, $\mu(A_1 \setminus A) = 0$. Dar

$$A \subset A_1 \cup (A \setminus A_1) \quad \text{şi} \quad A_1 \subset A \cup (A_1 \setminus A) ,$$

care ne dă, pe baza monotoniei şi subaditivităţii măsurii

$$\mu(A) \le \mu(A_1) \quad \text{şi} \quad \mu(A_1) \le \mu(A) ,$$

care arată că

$$\mu(A) = \mu(A_1) = \hat{\mu}(E) ,$$

deci $\hat{\mu}$ este corect definită. Fiind definită prin intermediul unei măsuri, $\hat{\mu}$ este de asemenea o măsură. Măsura $\hat{\mu}$ este completă. Într-adevăr, dacă $E \in \hat{\mathscr{A}}$ cu $\hat{\mu}(E) = \varnothing$ şi $F \subset E$, atunci există $A, B \in \mathscr{A}$ astfel încât

$$A \subset E \subset B \quad \text{şi} \quad \mu(B \setminus A) = 0 .$$

Dar $\hat{\mu}(E) = 0 = \mu(A)$, de unde rezultă că

$$\mu(B) = \mu(A \cup (B \setminus A)) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) = 0 .$$

Aşadar există mulţimile $\varnothing, B$ din $\mathscr{A}$ astfel încât

$$\varnothing \subset F \subset E \subset B \quad \text{şi} \quad \mu(B \setminus \varnothing) = \mu(B) = 0 ,$$

ceea ce înseamnă că $F \in \hat{\mathscr{A}}$.

Demonstraţia 1 este completă. Ea s-a bazat pe definiţia 1'.

Demonstraţia 2. (Bazată pe definiţia 1) În acest caz, la partea (i), trebuie să dovedim că $\hat{\mathscr{A}}$ verifică axioma (A_1) (pentru (A_2) procedăm ca mai înainte, iar (A_3) este o consecinţă a incluziunii $\mathscr{A} \subset \hat{\mathscr{A}}$).

Arătăm mai întâi, ca în demonstraţia 1, că $E \in \hat{\mathscr{A}} \Rightarrow C(E) \in \hat{\mathscr{A}}$ şi apoi că $E, F \in \hat{\mathscr{A}} \Rightarrow E \cap F \in \hat{\mathscr{A}}$. Într-adevăr, dacă $E, F \in \hat{\mathscr{A}}$, atunci există $A_1, B_1 \in \mathscr{A}$ astfel încât

$$A_1 \subset E \subset B_1 \quad \text{şi} \quad \mu(B_1 \setminus A_1) = 0 ,$$

respectiv $A_2, B_2 \in \mathscr{A}$, cu

$$A_2 \subset B_2 \quad \text{şi} \quad \mu(B_2 \setminus A_2) = 0$$

Punând $A = A_1 \cap A_2$, $B = B_1 \cap B_2$, rezultă că $A, B \in \mathscr{A}$, $A \subset E \cap F \subset B$ şi, pe baza incluziunii

$$(B_1 \cap B_2) \setminus (A_1 \cap A_2) \subset (B_1 \setminus A_1) \cap (B_2 \setminus A_2) ,$$

că

$$\mu(B \setminus A) \le \mu[(B_1 \setminus A_1) \cup (B_2 \setminus A_2)] \le \mu(B_1 \setminus A_1) + \mu(B_2 \setminus A_2) = 0 ,$$

ceea ce arată că $E \cap F \in \hat{\mathscr{A}}$.

Prin urmare, dacă $E, F \in \mathscr{A}$, avem şi $C(F) \in \mathscr{A}$, deci

$$E \setminus F = E \cap C(F) \in \mathscr{A}.$$

Observaţie. O altă variantă, pentru cazul că trebuie să probăm axiomele din definiţia 1, este să demonstrăm mai întâi (A_2) şi, ca element ajutător, axioma (A_4). Din acestea două rezultă apoi că $\hat{\mathscr{A}}$ este închisă în raport cu operaţiile de intersecţie şi de diferenţă.

Deşi în [4] rezultatele din Propoziţiile 6.5-5 şi 6.5-6 sunt date pentru $\mathscr{A}$ clan borelian, noi le vom prezenta aici pentru situaţia că $\mathscr{A}$ este σ-algebră (deci are loc şi condiţia (A_3), nu numai (A_1) şi (A_2), condiţii ce definesc clanul borelian) diferenţa fiind nesemnificativă. În următoarea teoremă reunim concluziile propoziţiilor 6.5-5 şi 6.5-6 .

TEOREMA 2. *Fie* $\mu : \mathscr{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *un spaţiu cu măsură şi*

$$\overline{\mathscr{A}} = \left\{ A \vartriangle B \,\middle|\, A \in \mathscr{A},\ B \subset M,\ \text{unde}\ M \in \mathscr{A},\ \mu(M) = 0 \right\}. \tag{3}$$

Atunci

(i) $\overline{\mathscr{A}}$ *este o σ-algebră ce conţine pe* $\mathscr{A}$;

(ii) Aplicaţia $\overline{\mu} : \overline{\mathscr{A}} \to \overline{\mathbb{R}}_+$, *definită prin*

$$\overline{\mu}(E) = \mu(A), \quad \forall\, E \in \overline{\mathscr{A}} \tag{4}$$

este o măsură completă, unde $A \subset \mathscr{A}$ *şi* $B \subset M$, *cu* $M \in \mathscr{A}$ *şi* $\mu(M) = 0$ *sunt astfel încât* $E = A \vartriangle B$.

Demonstraţie. (i) Se observă că dacă A, B, M sunt mulţimile implicate în (3), atunci

$$A \cup B = (A \setminus M) \vartriangle [M \cap (A \cup B)],$$

$$A \vartriangle B = (A \setminus M) \cup [M \cap (A \vartriangle B)],$$

relaţii care arată că $\overline{\mathscr{A}}$ coincide cu familia tuturor mulţimilor de forma $A \cup B$, în care $A \in \mathscr{A}$ şi B este o submulţime a unei mulţimi din $\mathscr{A}$ de măsură nulă astfel încât $A \cap B = \varnothing$. Dar dacă A şi B sunt mulţimi disjuncte, atunci

$A \cup B = A \vartriangle B$, ceea ce arată că

$$\overline{\mathscr{A}} = \left\{ A \cup B \,\middle|\, A \in \mathscr{A},\ B \subset M,\ \text{unde}\ M \in \mathscr{A},\ \mu(M) = 0 \right\}. \tag{3'}$$

Este clar că $\mathscr{A} \subset \overline{\mathscr{A}}$ căci $\forall\, A \in \mathscr{A}$ avem $A = A \cup \varnothing$ şi $\varnothing \subset M \in \mathscr{A}$,

$\mu(M) = 0$. Aşadar (A_3) este satisfăcută. Are loc şi (A_2).

Într-adevăr, fie $(E_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \overline{\mathscr{A}}$. Atunci pentru orice $i \in \mathbb{N}$, $E_i = A_i \cup B_i$, unde

$A_i \in \mathscr{A}$, $B_i \subset M_i$, $M_i \in \mathscr{A}$ cu $\mu(M_i) = 0$, de unde rezultă că

$$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \right) = A \cup B,$$

în care $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{A}$ şi

$$B = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i = M \in \mathscr{A}$$

cu $\mu(M) = 0$, adică $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \overline{\mathscr{A}}$.

Pentru a demonstra că şi (A_1) este îndeplinită, fie $E_1, E_2 \in \overline{\mathscr{A}}$. Atunci

$E_1 = A_1 \vartriangle B_1$, $E_2 = A_2 \vartriangle B_2$ cu $A_1, A_2 \in \mathscr{A}$ şi

$B_1 \subset M_1$, $B_2 \subset M_2$, $M_1, M_2 \in \mathscr{A}$ cu $\mu(M_1) = \mu(M_2) = 0$.

Însă $E_1 \vartriangle E_2 = (A_1 \vartriangle A_2) \vartriangle (B_1 \vartriangle B_2)$, care arată că $E_1 \vartriangle E_2 \in \overline{\mathscr{A}}$ prin urmare

$E_1 \setminus E_2 = (E_1 \cup E_2) \vartriangle E_2 \in \overline{\mathscr{A}}$.

(ii) Funcţia $\overline{\mu}$ este bine definită întrucât dacă

$$A \vartriangle B = A_1 \vartriangle B_1$$

în care $A_1 \in \mathscr{A}$, $B_1 \subset M$, $M \subset \mathscr{A}$ cu $\mu(M) = 0$, atunci

$$A \vartriangle A_1 = B \vartriangle B_1 \text{, deci } \mu(A \vartriangle A_1) = 0 \text{ ,}$$

care conduce la

$$\mu(A) = \mu(A_1) \text{ .}$$

Folosind definiţia (3') a lui $\overline{\mathscr{A}}$ rezultă uşor că $\overline{\mu}$ este o măsură. Măsura $\overline{\mu}$ este completă, întrucât, prin construcţie, $\overline{\mathscr{A}}$ conţine toate submulţimile tuturor mulţimilor de măsură nulă din $\mathscr{A}$.

Observaţii. 1) Demonstraţia teoremei 2 este preluată din [4];

2) Comparând demonstraţiile teoremelor 1 şi 2, se observă că, deşi cea din urmă are o demonstraţie mai scurtă, argumenetle implicate nu sunt întru totul imediate, astfel că, pentru o asimilare mai uşoară de către studenţi a noţiunii de completată a unei măsuri, preferăm teorema 1, cu oricare din demonstraţiile date aici;

3) $\widehat{\mathscr{A}}$ (şi $\overline{\mathscr{A}}$) se numeşte **completata lui** $\mathscr{A}$ iar $\widehat{\mu}$ (respectiv $\overline{\mu}$) se numeşte **completata măsurii** μ.

4) Este necesar totuşi să arătăm că $\widehat{\mathscr{A}}$ coincide cu $\overline{\mathscr{A}}$ şi $\widehat{\mu}$ coincide cu $\overline{\mu}$. Fie $E \in \widehat{\mathscr{A}}$. Rezultă că există $A_1, B_1 \in \mathscr{A}$, $A_1 \subset E \subset B_1$ şi $\mu(B_1 \setminus A_1) = 0$. Atunci $E = A_1 \bigcup (E \setminus A_1)$ şi $E \setminus A_1 \subset B_1 \setminus A_1$ cu $B_1 \setminus A_1 \in \mathscr{A}$ şi $\mu(B_1 \setminus A_1) = 0$. Cu notaţiile $B = E \setminus A_1$ şi $M = B_1 \setminus A_1$ şi $A = A_1$ avem tocmai că $E = A \bigcup B$, $A \in \mathscr{A}$, $B \subset M$, unde $M \in \mathscr{A}$ cu $\mu(M) = 0$, adică $E \in \overline{\mathscr{A}}$. Aşadar $\widehat{\mathscr{A}} \subset \overline{\mathscr{A}}$.

Reciproc, fie $E \in \overline{\mathscr{A}}$. Rezultă că există $A \in \mathscr{A}$, B ⊂ M unde $M \in \mathscr{A}$, $\mu(M) = 0$, astfel încât

$$E = A \bigcup B \text{ ,}$$

şi A, B sunt disjuncte, ceea ce înseamnă că

$$A \subset E \subset A \bigcup M \text{ , } A \subset \mathscr{A}, \ A \bigcup M \in \mathscr{A}$$

şi

$$\mu((A \bigcup B) \setminus A) = \mu(M) = 0 \text{ ,}$$

adică $E \in \widehat{\mathscr{A}}$.

Prin urmare cele două definiţii ale completatei unei σ-algebre sunt echivalente. Se arată uşor că şi definiţiile completatei unei măsuri, date de teorema 1, respectiv teorema 2, sunt echivalente.

Includerea uneia sau a celeilalte într-un curs de analiză reală depinde aşadar de opţiunea dascălului fie pentru simplitatea şi claritatea unor demonstraţii, fie pentru gradul de accesibilitate a argumentelor utilizate.

BIBLIOGRAFIE

1. **BERINDE,V.,** *Funcţii reale şi teoria măsurii,* Univ. din Baia Mare, 1996
2. **BERINDE,V.,** *Analiză reală,* Editura CUB PRESS 22, Baia Mare, 1997
3. **BERINDE,V.,** Un criteriu de măsurabilitate de tip cleşte, *Lucr. Sem. Creativ. Matematică*, vol 7 (1997-1998)
4. **PRECUPANU, A.,** *Analiză matematică. Funcţii reale* ,Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1976
5. **PREDA, P.,** *Analiză reală,* Universitatea din Timişoara, 1991

REMARKS ON THE INTRODUCTION OF THE CONCEPT OF σ-ALGEBRA AND COMPLETION OF A σ-ALGEBRA

ABSTRACT. The aim of this paper is to compare from a didactical point of view two ways for defining the notion of σ-algebra and completion of a σ-algebra in a course of real analysis.

Universitatea de Nord din Baia Mare
Catedra de Matematică şi Informatică
Str. Victoriei 76, 4800 Baia Mare
ROMANIA
E-mail: vberinde@univer.ubm.ro

Primit la 1.12.1997