Lucrările Seminarului de
CREATIVITATE MATEMATICĂ
Vol. 7 (1997-1998), 39-52

ABORDAREA UNITARĂ A UNOR PROBLEME DE CONCURS

Gheorghe BOROICA şi Teodor SZASZ

Nota de faţă îşi propune să redea teorema lui Hamilton-Cayley, teorema lui Frobenius şi să indice o metodă unitară de abordare a unor tipuri de probleme întâlnite la diverse concursuri şcolare.

Fie K un corp de numere $(K = Q,\ K = \mathbb{R}\ \textit{sau}\ K = C)$ şi $f \in K[X]$ un polinom în nedeterminata X cu coeficienţi din K,

$$f = a_0 + a_1 \cdot X + a_2 \cdot X^2 + \ldots + a_d \cdot X^d, \quad d \in \mathbb{N}.$$

Polinomul $f \in K[X]$ se numeşte polinom *monic* dacă are coeficientul dominant egal cu 1.

Notăm prin $\mathcal{M}_n(K)$ mulţimea matricelor pătratice de ordinul n având elementele din corpul K, I_n matricea unitate, O_n matricea nulă.

Dacă $A \in \mathcal{M}_n(K)$ atunci matricea $f(A) = a_0 \cdot I_n + a_1 \cdot A + a_2 \cdot A^2 + \ldots + a_d \cdot A^d$ se numeşte valoarea în A a polinomului f.

Dacă $f(A) = O_n$ atunci spunem că A este rădăcină din $\mathcal{M}_n(K)$ a lui f.

Propoziţia 1. *([2]) Fie* $f \in K[X]$, $f = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n \cdot X^n$, $a_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}^*$ *şi* $f(X) \cdot I_n = a_0 \cdot I_n + a_1 I_n X + \ldots + a_n \cdot I_n \cdot X^n$. *Pentru orice matrice* $A \in \mathcal{M}_n(K)$ *se pot determina în mod unic matricele* $B_0, B_1, \ldots, B_{n-1}$, $B \in \mathcal{M}_n(K)$ *astfel încât*

(1) $\quad f(X)\cdot I_n = (I_n \cdot X - A)(B_{n-1}\cdot X^{n-1} + \ldots + B_1 X + B_0) + B', \quad B' = f(A)$

Definiția 1. Fie o matrice $A \in \mathcal{M}_n(K)$, $A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,n} \\ j=\overline{1,n}}}$.

Polinomul $p_A(X) = det\,(X \cdot I_n - A) = X^n - (a_{11} + \ldots + a_{nn})X^{n-1} + \ldots + (-1)^n \cdot det\,A \in K[X]$ se numește **polinomul caracteristic** al matricei A.

Teorema 1. (Hamilton-Cayley) ([2]) *Pentru orice matrice $A \in \mathcal{M}_n(K)$ avem $p_A(A) = O_n$, adică orice matrice este rădăcină a polinomului său caracteristic.*

Definiția 2. Fie K un corp de numere, f un polinom din $K[X]$ cu grad $f = d > 0$. Polinomul f este **reductibil** peste K dacă există două polinoame $g, h \in K[X]$ astfel încât $f = g \cdot h$ cu $grad\, g < d$, $grad\, h < d$. În caz contrar, polinomul f este **ireductibil** peste K.

Definiția 3. Fie K un corp de numere și $z \in C$.

Numărul z îl numim **algebric peste K** dacă există un polinom $g \in K[X]$, g nenul, astfel încât $g(z)=0$. În caz contrar spunem că z este **transcendent peste *K***.

De exemplu, numărul $z = \sqrt[3]{2}$ este algebric peste **Q** deoarece $g(\sqrt[3]{2}) = 0$, unde $g = X^3 - 2 \in \boldsymbol{Q}[X]$.

Definiția 4. Fie $z \in C$ un număr algebric peste corpul de numere K. Polinomul monic f de grad minim din $K[X]$ care admite pe z ca rădăcină se numește **polinomul minimal** al lui z pe K.

Propoziția 2. *([4]) Fie K un corp de numere și $z \in C$ un număr algebric peste K. Atunci polinomul minimal f al lui z peste K este ireductibil peste K.*

Observația 1. Polinomul minimal al unei matrice nu este obligatoriu ireductibil peste K. Ireductibilitatea polinomului minimal al unui număr algebric s-a stabilit folosind faptul că produsul a două numere complexe diferite de zero este diferit de zero, proprietate care nu mai este adevărată în cazul matricelor.

Observația 2. ([4]) Fie $f \in K[X]$ un polinom ireductibil peste K și $z \in K$ o rădăcină a lui f. Atunci polinomul minimal al lui z peste K este chiar f.

Teorema 2. (Teorema lui Frobenius) *Fie K un corp de numere și matricea $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Polinoamele m_A și p_A admit aceiași divizori ireductibili, unde m_A este polinomul minimal al matricei A iar p_A este polinomul caracteristic al matricei A.*

Observația 3. Teorema lui Frobenius este adevărată pentru o matrice cu elemente dintr-un inel comutativ oarecare.

Ilustrăm în continuare utilizarea teoremei lui Frobenius și a teoremei lui Hamilton-Cayley în rezolvarea unor probleme. În continuare notăm prin p_A polinomul caracteristic al matricei $A \in \mathcal{M}_n(K)$ și prin m_A polinomul minimal al matricei A.

Problema 1. Fie $f \in \mathbb{C}[X]$ astfel încât $f(1) \neq 0$. Dacă matricea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ are proprietatea că $f(A) = O_n$, arătați că matricea $I_n - A$ este inversabilă.

(D.Andrica, Concurs interjudețean, Satu Mare, 1992)

Soluție. Fie $p_A(X) = det(X \cdot I_n - A) = X^n - (a_{11} + \ldots + a_{nn})X^{n-1} + \ldots + (-1)^n \det A$.

Obținem $p_A(1) = det(I_n - A)$. Presupunem că matricea $I_n - A$ nu este inversabilă, deci $det(I_n - A) = 0$ și avem $p_A(1) = 0 \to (X-1) \mid p_A$. Cum $X-1$ este factor ireductibil peste $\mathbb{C}$ al lui p_A, utilizând teorema lui Frobenius obținem că

$(X-1)/m_A \to m_A(1) = 0.$

Dar $m_A \mid f$ și folosind relația anterioară obținem $f(1) = 0$ ceea ce contrazice ipoteza. Ca urmare, presupunerea făcută este falsă și demonstrația este încheiată.

Problema 2. Fie matricea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ astfel încât $A^3 = A + I_n$.

Arătați că $\det A > 0$.

(Olimpiadă, etapa județeană, 1986)

Soluţie. Metoda I. Fie polinomul $f = X^3 - X - 1$. Avem $f(A) = O_n$.

Dar $m_A / f \Rightarrow m_A / (X^3 - X - 1)$.

Folosind metodele analizei matematice, se arată că polinomul f are o singură rădăcină reală a şi $a > 0$. Obţinem $f = (X-a)(X^2 + bx + c)$ cu $a, b, c \in \mathbb{R}, a > 0$ şi $b^2 - 4c < 0$. Evident avem $c > 0$. Cum m_A / f, rezultă că divizorii ireductibili peste $\mathbb{R}$ ai lui m_A, deci şi ai lui p_A, sunt din mulţimea $\{X - a,\ X^2 + bX + c\}$.

Descompunând pe p_A în produse de factori ireductibili peste $\mathbb{R}$ avem $p_A(X) = X^n - (a_{11} + \ldots + a_{nn})X^{n-1} + \ldots + (-1)^n \cdot \det A = (X-a)^s \cdot (X^2 + bX + c)^t$, cu $s, t \in \mathbb{N}, s + 2t = n$. Luând valoarea în zero a polinoamelor din egalitatea precedentă obţinem $(-1)^n \cdot \det A = (-1)^s \cdot a^s \cdot c^t \Rightarrow \det A = a^s \cdot c^t > 0$

Metoda II.

$$A^3 = A + I_n \Rightarrow A^3 - I_n = A \Rightarrow (A - I_n)(A^2 + A + I_n) = A \Rightarrow$$

$$(2) \qquad \det A = \det(A - I_n) \cdot \det(A^2 + A + I_n)$$

Dar (3) $\det(A^2 + A + I_n) = \det\left(\left(A + \frac{1}{2}I_n\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}I_n\right)^2\right) \geq 0.$

Din (2) şi (3) rezultă că $\det A$ şi $\det(A - I_n)$ au acelaşi semn sau sunt nuli.

Apoi, $A^3 - A = I_n \Rightarrow A(A - I_n)(A + I_n) = I_n \Rightarrow \det A \cdot \det(A - I_n) \cdot \det(A + I_n) = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \det A, \det(A - I_n)$ şi $\det(A + I_n) \subset \mathbb{R}^*$, de unde obţinem că $\det(A + I_n) > 0$, deoarece $\det A$ şi $\det(A - I_n)$ au acelaşi semn.

Din $A^3 = A + I_n \Rightarrow \det(A^3) = \det(A + I_n) > 0 \Rightarrow (\det A)^3 > 0 \Rightarrow \det A > 0$.

Comparând cele două metode prezentate mai sus, putem constata că prima dintre ele permite rezolvarea unei probleme mai generale după cum vom vedea mai jos.

Problema 3. Dacă $A\in\mathscr{M}_n(K)$ este rădăcină a unui polinom $f\in\mathbb{R}[X]$ care admite o singură rădăcină reală α strict pozitivă şi f are coeficientul dominant $a>0$, atunci $det A>0$.

Soluţie. Avem

$$f=(X-\alpha)(X^2+b_1X+c_1)^{k_1}\cdot(X^2+b_2X+c_2)^{k_2}...(X^2+b_p\cdot X+c_p)^{k_p}\cdot a \text{ cu}$$

$$b_i^2-4c_i<0,\ i\in\{1,2,...,p\},\ grad f \overset{not}{=} l=1+2(k_1+k_2+...+k_p)$$

Deoarece m_A/f rezultă că divizorii ireductibili peste $\mathbb{R}$ ai lui m_A, deci şi ai lui p_A, sunt din mulţimea

$$\{X-\alpha, X^2+b_1X+c_1,...,X^2+b_p\cdot X+c_p\}$$

Obţinem

$$p_A(X)=(X-\alpha)^{t_0}\cdot(X^2+b_1X+c_1)^{t_1}\cdot...\cdot(X^2+b_1X+c_p)^{t_p}\cdot a \text{ cu } t_0+2(t_1+...+t_p)=l$$

şi $c_i>0$ (rezultă din $b_i^2<4c_i$ şi ipoteză) pentru $i\in\{1,2,...,p\}$.

De unde avem

$$p_A(0)=(-\alpha)^{t_0}\cdot c_1^{t_1}\cdot...\cdot c_p^{t_p}\cdot a=(-1)^l\cdot det A\Rightarrow det A=\alpha^{t_0}\cdot c_1^{t_1}\cdot...\cdot c_p^{t_p}\cdot a>0.$$

Problema 4. Fie $A\in\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, $A=(a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,2}\\ j=\overline{1,2}}}$ astfel încât $A^3=I_2$ şi $A\neq I_2$.

Să se arate că $a_{11}+a_{22}=-1$.

Soluţie. Fie polinomul $f=X^3-1=(X-1)(X^2+X+1)\in\mathbb{R}[X]$.

Matricea A este rădăcină a polinomului f $(f(A)=O_n)$ conform ipotezei.

Avem m_A/f, $grad m_A\leq grad p_A=2$ şi utilizând teorema lui Frobenius obţinem că divizorii ireductibili peste $\mathbb{R}$ ai lui m_A pot fi din mulţimea $\{X-1,\ X^2+X+1\}$.

Presupunând $m_A = (X-1)^2$ rezultă că m_A nu divide pe f, ceea ce reprezintă o contradicție.

Dacă $m_A = X-1 \Rightarrow A - I_2 = O_2$, contradicție cu ipoteza.

Rămâne $m_A = X^2 + X + 1 \Rightarrow A^2 + A + I_2 = O_2$.

Dar $p_A = X^2 - (a_{11}+a_{22})X + \det A \cdot I_2 \Rightarrow A^2 - (a_{11}+a_{22})A + \det A \cdot I_2 = O_2$

Cum m_A / p_A, din ultimele trei relații obținem $m_A = p_A$, deci

$$-(a_{11}+a_{22}) = 1 \Rightarrow a_{11}+a_{22} = -1.$$

Problema 5. Fie $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Dacă există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $A^n = O_2$, atunci $A^2 = O_2$.

(Concurs etapa județeană, Brăila, 1993)

Soluție. Metoda I. Din $A^n = O_2$ rezultă că A este rădăcină pentru polinomul $f = X^n$.

Cum m_A / f obținem că X este singurul divizor ireductibil al lui m_A.

Folosind teorema lui Frobenius și faptul că $grad\, p_A = 2$, obținem că $p_A(X) = X^2 \Rightarrow A^2 = O_2$.

Metoda II. Din $A^n = O_2 \Rightarrow \det(A^n) = 0 \Rightarrow \det A = 0$.

Din relația lui Cayley-Hamilton, $A^2 - \alpha \cdot A + \det A \cdot I_2 = O_2$, $\alpha = Tr(A)$, obținem

(4) $$A^2 = \alpha \cdot A$$

Dacă n=1 atunci avem $A = O_2 \Rightarrow A^2 = O_2$.

Dacă n=2 atunci problema este rezolvată.

Presupunem în continuare că $n \geq 3$. Din (4) pentru $\alpha = 0$ avem $A^2 = O_2$.

Considerăm în continuare $\alpha \neq 0$. Din relația (4) obținem

$$A^2 = \alpha \cdot A,\ A^3 = \alpha \cdot A^2, \ldots, A^{n-1} = \alpha \cdot A^{n-2},\ A^n = \alpha \cdot A^{n-1} \overset{ip}{=} O_2$$

Din ultima relație, deoarece $\alpha \neq 0$, obținem $A^{n-1} = O_2$ și parcurgând aceste egalități în sens invers vom obține că $A^2 = O_2$. Cu acestea demonstrația este încheiată.

Următoarea problemă generalizează problema precedentă.

Problema 6. Fie K un corp comutativ, $n \in N^*$ și $A \in \mathscr{M}_n(K)$, o matrice nilpotentă (există $p \in N^*$ astfel încât $A^p = O_n$). Atunci $A^n = O_n$.

Soluție. Dacă n=1, admițând că $\mathscr{M}_1$ (K)=K vom avea că A este element nilpotent în corpul K, deci A=O. Să presupunem în continuare $n \geq 2$. Vom nota cu r cel mai mic număr natural cu proprietatea că $A^r = O_n$ (din ipoteză obținem că acest număr există). Vom arăta că $r \leq n$.

Să presupunem prin absurd că $r > n$. Fie în continuare

$p_A(X) = X^n + a_{n-1} \cdot X^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot X + a_0 \in K[X]$ polinomul caracteristic al matricei A și conform teoremei Hamilton-Cayley avem

(5) $$A^n + a_{n-1} \cdot A^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot A + a_0 \cdot I_0 = O_n$$

Deoarece $r > n$, înmulțind pe rând relația (5) cu $A^{r-1}, A^{r-2}, \ldots, A^{r-m}$ și ținând cont că $A^l \neq O_n$, $1 \leq l < r$ și $A^l = O_n, l \geq r$, vom obține că $a_0 = a_1 = \ldots = a_{n-1} = 0$. Relația (5) se va scrie $A^n = O_n$, ceea ce contrazice minimalitatea lui r. Deci $r < n$. Înmulțind eventual (dacă r < n) egalitatea $A^r = O_n$ cu A^{n-r}, vom obține $A^n = O_n$.

Problema 7. Fie $A\in\mathcal{M}_n(\mathbf{Z})$, $m\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$ astfel încât $(m, \det A)=1$. Să se arate că matricea $A^2+A+m\cdot I_n$ este nesingulară.

(M. Piticari, R.M.T.)

Soluţie. Fie $p_A(X)=\det(X\cdot I_n - A)$ polinomul caracteristic al matricei A. Avem $p_A(A)=O_n$ şi $p_A(0)=(-1)^n\cdot\det A$. Arătăm că polinomul $f=X^2+X+m$, care este ireductibil peste $\mathbb{R}$, nu divide polinomul p_A.

Presupunem că $f/p_n\to(\exists)\ C\in\mathbb{R}[X]$ (de fapt $C\in\mathbb{Z}[X]$) astfel încât

$p_A(X)=(X^2+X+m)\cdot C(X)\to p_A(0)=m\cdot C(0)\to(-1)^n\det A=m\cdot C(0)\to m/\det A$

ceea ce contrazice ipoteza.

Rămâne $(X^2+X+m, p_A(X))=1\to(\exists)\ q_1,q_2\in\mathbb{Z}[X]$ astfel încât

$$(X^2+X+m)\,q_1(X)+p_A(X)\cdot q_2(X)=1\to$$

$$\to(A^2+A+m\cdot I_n)\cdot q_1(A)+O_n=I_n\to\det(A^2+A+m\cdot I_n)\neq 0\to$$

$$\to A^2+A+m\cdot I_n \text{ este nesingulară.}$$

Problema 8. Fie $A\in\mathcal{M}_2(\mathbf{Z})$ cu proprietatea că există $n\in\mathbb{N}^*$, $(n,6)=1$ astfel încât $A^n=I_2$. Atunci $A=I_2$.

(L. Panaitopol)

Soluţie. Avem $A\in\mathcal{M}_2(\mathbf{Z})\subset\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Fie m_A polinomul minimal în $\mathbb{R}[X]$ al lui A şi $d_A=grad(m_A)$

Deoarece $grad\, p_A=2$ şi m_A/p_A obţinem $grad\, m_A\le 2$.

Dacă $d_A=1$, atunci $m_A=X-\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}$. Cum $X-\alpha$ este un divizor al lui $f=X^n-1$ şi cum polinomul f are în cazul $(n,6)=1$ o singură rădăcină reală pe $\alpha=1$ obţinem

$$m_A=X-1,\ \text{de unde}\ A-I_2=O_2\to A=I_2.$$

Dacă $d_A = 2$, atunci $m_A = p_A = X^2 + pX + q \in \mathbb{Z}[X]$. Deoarece $(n,6)=1$, polinomul $f = X^n - 1$ are o singură rădăcină reală, pe 1 şi aceasta este simplă. Cum m_A / f, avem $\Delta = p^2 - 4q < 0$. Ecuaţia $f(x)=0$ are rădăcinile

$$x_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n},\ k = \overline{0, n-1}$$

Deoarece x_k este rădăcină pentru m_A şi $m_A \in \mathbb{R}[X]$ rezultă că $\overline{x_k}$ este rădăcină pentru m_A, de unde $m_A = (X - x_k)(X - \overline{x_k}) = X^2 - 2\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \cdot X + 1$, $0 < k \le n-1$.

Dar $m_A = p_A \in \mathbb{Z}[X]$, de unde rezultă că $\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \in \{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\}$ deoarece

$$-1 \le 2\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \le 2 \text{ şi } 2\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \in \mathbb{Z}.$$

Deoarece $\Delta < 0$ şi $\Delta = 4\left(\cos^2\left(\frac{2k\pi}{n}\right) - 1\right)$ obţinem

$$\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \in \{0, \pm\frac{1}{2}\}.$$

Însă din $(n,2) = 1 \Rightarrow \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \ne 0$ (din $\cos\frac{2k\pi}{n} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{2k\pi}{n} = \pm\frac{\pi}{2} + 2l\pi, l \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2k\pi = \pm n\pi + 2ln\pi \Rightarrow 2/n).$$

Din $(n,3) = 1 \Rightarrow \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \ne \frac{1}{2}$. Deci cazul $d_A = 2$ nu este posibil.

Problema 9. Fie $n \in \mathbb{N}, n \ge 2$ şi $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ astfel încât pentru $k \in \mathbb{N}^*$ să avem $A^k = A + I_n$. Să se demonstreze că

i) Pentru k impar avem $\det A > 0$.

ii) Pentru k par, iar n impar, concluzia de la i) nu mai este neapărat adevărată.

(Dumitru Bușneag, Concursul interjudețean "Gh. Țițeica", 1989)

Soluție. Metoda I.

i) Matricea A este rădăcină a polinomului $f = X^k - X - 1 \in \mathbb{R}[X]$.

Folosind metodele analizei matematice se arată că ecuația $f(x)=0$ are o unică rădăcină reală strict pozitivă, notată x_0.

Deoarece $k = 2p+1, p \in \mathbb{N}^*$, obținem

$f = (X - x_0)(X^2 + b_1 X + c_1)^{k_1}(X^2 + b_2 \cdot X + c_2)^{k_2} \ldots (X^2 + b_l \cdot X + c_l)^{k_l}$ cu

$\Delta_i = b_i^2 - 4c_i < 0$, $c_i \neq 0$, $b_i, c_i \in \mathbb{R}$ $i \in \{1,2,\ldots,l\}$.

De fapt obținem $c_i > 0$, $i \in \{1,\ldots,l\}$.

Avem $grad\, f = 2p+1 = 1 + 2(k_1 + k_2 + \ldots + k_l) \Rightarrow k_1 + k_2 + \ldots + k_l = p$.

Deoarece m_A / f, rezultă că divizorii ireductibili peste $\mathbb{R}$ ai lui m_A, deci și ai lui p_A, sunt din mulțimea

$$\{X - x_0, X^2 + b_1 X + c_1, \ldots, X^2 + b_l \cdot X + c_l\}.$$

Obținem

$$p_A(X) = (X - x_0)^{t_0} \cdot (X^2 + b_1 X + c_1)^{t_1} \cdot \ldots \cdot (X^2 + b_l \cdot X + c_l)^{t_l} \text{ cu}$$

$$t_0 + 2(t_1 + \ldots + t_l) = 2p+1, \text{ iar } p_A(0) = (-x_0)^{t_0} \cdot c_1^{t_1} \cdot \ldots \cdot c_l^{t_l} =$$

$$= (-1)^{2p+1} \cdot \det A \Rightarrow \det A = -(-1)^{2p+1-2(t_1+\ldots+t_l)} \cdot x_0^{t_0} \cdot c_1^{t_1} \ldots c_l^{t_l} > 0.$$

ii) Fie k un număr par și $A = R \cdot I_n \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Egalitatea $A^k = A + I_n$ implică faptul că A este rădăcină a ecuației $R^k - R - 1 = 0$.

Deci $R^k - R - 1 = 0$. Deoarece funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(R) = R^k - R - 1$ este continuă,

$f(-\infty)=\infty$ şi $f(0)=-1$, rezultă că f admite o rădăcină $R_0<0$. În acest caz, $det\,A=det\,(R_0\cdot I_n)=R_0^n<0$ şi $A=R_0\cdot I_n$ verifică relaţia $A^k=A+I_n$.

Metoda II. i) Evident $k\geq 3$. Din $A^k=A+I_n$ obţinem

$A(A^{k-1}-I_n)=I_n\Rightarrow det\,A\cdot det(A^{k-1}-I_n)=1\Rightarrow det\,A\neq 0$. Pe de altă parte,

(6) $\qquad A^{k+1}=A^2+A$ şi deci $A\cdot(A-I_n)(A^{k-1}+A^{k-2}+...+A+I_n)=A^2$

Ecuaţia $1+x+...+x^{n-1}=0$ nu are rădăcini reale şi nici multiple de unde obţinem

$$1+x+...+x^{n-1}=\prod_{i=1}^{r}(X^2+\alpha_i\cdot X+\beta_i) \text{ cu } \alpha_i^2-4\beta_i<0,\ \alpha_i,\ \beta_i\in\mathbb{R},\ \beta_i>0,\ i\in\{1,2,...,r\}.$$

Atunci

$$det(I_n+A+...+A^{k-1})=det(\prod_{i=1}^{r}(X^2+b_iX+c_i))=\prod_{i=1}^{r}det(A^2+b_i\cdot A+c_i\cdot I_n).$$

În continuare se foloseşte faptul că

$$A^2+b_i\cdot A+c_i\cdot I_n=\left(A+\frac{b_i}{2}\cdot I_n\right)^2+\frac{4c_k-b_k^2}{4}\cdot I_n\ \mathscr{M}_n(\mathrm{K})$$

pentru orice k şi că $det(X^2+Y^2)\geq 0\ \mathscr{M}_n(\mathrm{K})$ pentru orice $X,Y\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ cu $XY=YX$.

Deducem $det\,(I_n+A+...+A^{k-1})\geq 0$.

Din (6) obţinem $det\,A(A-I_n)\cdot det(I_n+A+...+A^{k-1})=det(A^2)=(\det A)^2$ şi folosind faptul că $det\,A\neq 0$, avem (7) $det\,A(A-I_n)>0$.

Întrucât $k=2p+1$, din relaţia

$$A(A^{k-1}-I_n)=I_n\Rightarrow A(A^{2p}-I_n)=I_n\Rightarrow A(A^2-I_n)(A^{2(p-1)}+...+A^2+I_n)=I_n$$

şi de aici, folosind relaţia (7), obţinem

$det(A+I_n)>0$. Cum $A^k=A+I_n$ şi k este impar, avem

$(det\,A)^k=det\,(A+I_n)>0$, de unde $det\,A>0$.

Problema 10. Fie $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea $det(A^2-A+I_2)=0$.

a) Să se arate că $A^2-A+I_2=O_2$.

b) Dacă $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, să se calculeze valoarea determinantului

$$det(A^2+\alpha A+\beta I_2).$$

(Vasile Pop, Concursul naţional de matematică Avram Iancu, Cluj,1995)

Soluţie.

a) Fie polinomul $f=X^2-X+1\in\mathbb{R}[X]$. Notăm x_1,x_2 rădăcinile polinomului f.

Obţinem $f=(X-x_1)(X-x_2)$. Deoarece $det(f(A))=0$, obţinem

(8) $$det(A-x_1\cdot I_2)\cdot det(A-x_2\cdot I_2)=0$$

Folosind relaţia (8) polinomul $p_A(X)=det(X\cdot I_2-A)=(-1)^2\cdot det(A-X\cdot I_2)=$

$=X^2-Tr(A)\cdot X+det(A)\cdot I_2$ are pe x_1 sau x_2 rădăcină.

Deoarece $f\in\mathbb{R}[X]$ şi $x_2=\overline{x_1}$ deducem că x_1 şi x_2 sunt rădăcinile polinomului p_A. Folosind acum relaţiile lui Viete obţinem

$$x_1+x_2=Tr(A),\ x_1\cdot x_2=detA,\ \text{adică}\ Tr(A)=1,\ detA=1.$$

Utilizând relaţia lui Cayley-Hamilton deducem că $A^2-A+I_2=O_2$.

b) Din a) avem $A^2+\alpha\cdot A+\beta\cdot I_2=(\alpha+1)A+(\beta-1)I_2$.

Prin calcul direct se obţine

$$det(A^2+\alpha A+\beta I_2)=det((\alpha+1)A+(\beta-1)I_2)=(\alpha+1)^2+(\alpha+1)(\beta-1)+(\beta-1)^2.$$

PROBLEME PROPUSE

1. Fie $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ pentru care există $k\in\mathbb{N}$, $k>2$ astfel încât $A^k=O_2$.

Demonstraţi că $det(I_2+A+....+A^{k-1})=1$.

(Dumitru Buşneag, Concursul interjudeţean "Gh.Ţiţeica", 1992)

2. Se consideră matricea $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ astfel încât $A^3=O_2$. Arătaţi că:

a) $A^2=O_2$

b) $det\,(I_2+A)=1$.

(Sever Moldoveanu, concurs etapă locală, Argeş, 1996)

3. Fie matricea $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea $A^3=A+I_n$. Să se arate că $A+I_n$ este inversabilă şi să se calculeze inversa.

(Concurs etapă locală, Alba, 1996)

4. Să se determine numerele naturale n pentru care, dacă $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$ este o matrice cu proprietatea că $det(A^2-3A+I_n)=0$, atunci neapărat $A^2-3A+I_n=O_n$.

(Concursul de matematică "Renaissance", Timişoara, 1996)

5. Fie A o matrice $n\times n$ dimensională, cu coeficienţi numere complexe, astfel că polinomul ei caracteristic are toate rădăcinile reale strict pozitive.
Demonstraţi că matricea A este inversabilă şi că au loc inegalităţile

$$\frac{Tr(A)}{n}\geq\sqrt[n]{det\,A}\geq\frac{n}{Tr(A^{-1})}$$

(Concursul interjudeţean "Gh.Ţiţeica", 1995)

6. Fie matricea $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ($n\in\mathbb{N}, n\geq 2$) astfel încât există

$m\in\mathbb{N}, m\geq n+1$ cu $A^m=O_n$. Să se arate că $A^n=O_n$.

(Paul-Andi Nagy, Problema C:1441, G.M. nr.9, 1993)

7. Fie $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ o matrice cu proprietatea că $Tr(A)=2$ şi există $n\in\mathbb{N}^*$, n impar, astfel încât $A^n=I_2$.

Să se arate că $A=I_2$.

(Tiberiu Agnola, Concurs etapă judeţeană, Sibiu, 1993)

A UNITARY TREATMENT OF SOME CONTEST PROBLEMS

Abstract. This paper wants to present the Cayley-Hamilton's theorem, the Frobenius' theorem and a unitary method for solving some types of problems proposed at students' competitions.

BIBLIOGRAFIE

1. **BUŞNEAG, D., CONSTANTIN, P., TUŢESCU, L.,** Concursul interjudeţean de matematică "Gheorghe Ţiţeica", vol.III, Ed.Cardinal, 1996
2. **CHIRCIU, M., ALEXE, Şt., CHIRILĂ, M., NĂCHILĂ, P.,** Matematica în concursurile şcolare, Ed.Paralela 45,1996
3. **GHERGU, M.,** Asupra unei probleme de concurs, G.M., CI(1996), 541
4. **ION D. ION,** O demonstraţie elementară pentru o teoremă a lui Frobenius, G.M., XCII(1987), 398
5. *** Revista de Matematică din Timişoara I(1996), 43-44

Gheorghe Boroica
Colegiul "Gheoghe Şincai "
4800 Baia Mare
ROMANIA

Teodor Szasz
Şcoala Generală Nimigea
Jud. Bistriţa-Năsăud
ROMANIA

Primit la 1.05.1997