Lucrările Seminarului de
CREATIVITATE MATEMATICĂ
Vol. 7 (1997-1998), 59- 64

GENERALIZĂRI ALE UNOR PROBLEME DE CONCURS

Nicolae MUŞUROIA

În această lucrare vom utiliza numerele complexe pentru rezolvarea şi generalizarea unor probleme de geometrie plană.

Notăm cu litere mari, punctele planului complex şi cu litere mici corespunzătoare, afixele lor. Amintim câteva rezultate care ne vor fi utile pe parcurs.

1). Distanţa între punctele A şi B este $AB = |a-b|$.

2). Afixul punctului M care împarte segmentul $[AB]$ în raportul k, adică $\frac{MA}{AB}=k,\ k\in(0,1]$ este $m=(1-k)a+kb$.

3). Triunghiul ABC este echilateral, dacă şi numai dacă: $b=a+(c-a)\varepsilon$,

$\varepsilon=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$.

4). Triunghiurile ABC şi $A'B'C'$, la fel orientate, sunt asemenea dacă şi numai dacă:

$$a'(b-c)+b'(c-a)+c'(a-b)=0.$$

Problema 1. ([1]), pag.38) Pe latura triunghiului ABC construim în exterior pătratele $ABDE, ACFG$. Dacă M este mijlocul segmentului $[BC]$, să se arate că

a) $GE = 2AM$

b) $GE \perp AM$

Generalizare. Pe laturile triunghiului ABC construim în exterior triunghiurile isoscele de vârf A, GAC, respectiv EAB, cu

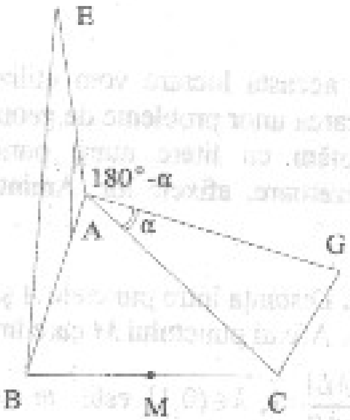
$m(GAC) = \alpha, m(EAB) = 180^\circ - \alpha,$

$0 < \alpha \le 90^\circ$. Dacă M este mijlocul segmentului $[BC]$, atunci:

a) $GE = 2AM$

b) $m(GE, AM) = \alpha$.

Demonstrație.



Fie $\varepsilon = \cos\alpha + i\sin\alpha$

Atunci $g = a + (c-a)\varepsilon$

$e = a - (b-a)\varepsilon$

$g - e = (c + b - 2a)\varepsilon$.

$m - a = \dfrac{b+c}{2} - a = \dfrac{b+c-2a}{2}$.

Deci $g - e = 2(m-a)\cdot\varepsilon$.

Rezultă $GE = 2MA$ și

$m(GE, MA) = \arg\varepsilon = \alpha$.

Observația 1. Pentru $\alpha = 90^\circ$ obținem Problema 1, Olimpiada Județeană, clasa a IX-a, 1970

Observația 2. Concluzia se păstrează dacă cele două triunghiuri se construiesc spre interior.

Problema 2. ([4], pag.12). Dacă triunghiurile ABC și $A'B'C'$ sunt echilaterale și la fel orientate, atunci mijloacele segmentelor (AA'), (BB'), (CC')

sunt vârfurile unui triunghi echilateral.

Generalizare 1. Dacă triunghiurile ABC şi $A'B'C'$ sunt echilaterale şi la fel orientate, atunci punctele A'', B'', C'' care împart segmentele $(AA'), (BB'), (CC')$ în raportul dat k sunt vârfurile unui triunghi echilateral.

Demonstraţie. Avem

$$a'' = (1-k)a + ka'$$

$$b'' = (1-k)b + kb'$$

$$c'' = (1-k)c + kc'$$

Triunghiurile ABC respectiv $A'B'C'$ fiind echilaterale avem $b = a + (c-a)\varepsilon$, respectiv $b' = a' + (c'-a')\varepsilon$, unde $\varepsilon = cos\frac{\pi}{3} + i sin\frac{\pi}{3}$.

Atunci

$$b'' = (1-k)b + kb' = (1-k)[a + (c-a)\varepsilon] + k[a' + (c'-a')\varepsilon] = [(1-k)a + ka'] +$$

$$+ [(1-k)c + kc']\varepsilon - [(1-k)a + ka']\varepsilon = a'' + (c'' - a'')\varepsilon.$$

Deci $\triangle ABC$ este echilateral.

Generalizare 2. Dacă triunghiurile ABC şi $A'B'C'$ sunt asemenea şi la fel orientate, atunci punctele A'', B'', C'' care împart segmentele $[AA'], [BB''], [CC']$ în raport dat k, $0 < k \leq 1$, sunt vârfurile unui triunghi asemenea cu cele date.

Demonstraţie. Avem

$$a''(b-c) = [(1-k)a + ka'](b-c) = ka'(b-c) + (1-k)(ab-ac).$$

Analog

$$b''(c-a) = kb'(c-a) + (1-k)(bc-ab)$$

$$c''(a-b) = kc'(a-b) + (1-k)(ca-bc)$$

Triunghiurile ABC şi $A'B'C'$ fiind asemenea avem

$$a'(b-c)+b'(c-a)+c'(a-b)=0.$$

Efectuând calculele obţinem

$$a''(b-c)+b''(c-a)+c''(a-b)=0,$$

deci $$\Delta A''B''C'' \sim \Delta ABC$$

Generalizare 3. Dacă $A_1A_2...A_n$, $B_1B_2...B_n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, sunt poligoane regulate la fel orientate, atunci punctele c_i, $i=\overline{1,n}$ care împart segmentele $[A_iB_i]$ în raport dat k, $k \in (0,1]$, sunt vârfurile unui poligon regulat.

Demonstraţie. Putem presupune că poligonul $A_1A_2...A_n$ este înscris în cercul de centru O (originea sistemului de coordonate) şi de rază r, iar $B_1B_2...B_n$ într-un cerc de centru O' şi rază r'.

Atunci

$$a_i = r\varepsilon_i = r\varepsilon_1^{i-1},\ i=\overline{1,n}$$

$$b_i = r'\varepsilon_i + o'\ \text{, unde}\quad \varepsilon_1 = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}.$$

Deci $c_i = (1-k)a_i + kb_i = (1-k)r\varepsilon_i + k(r'\varepsilon_i + o') = [(1-k)r + kr']\varepsilon_i + ko'$.

Fie $o'' \in [0o'']$, $\dfrac{0o''}{0o'} = k$. Deci $o'' = ko'$.

Atunci $c_i = [(1-k)r + kr']\varepsilon_i + o''$, $i=\overline{1,n}$ adică $c_1, c_2, ..., c_n$ este un poligon regulat de centru $0''$ şi rază $(1-k)r + kr'$.

Observaţie. Pentru $k=\dfrac{1}{2}$ obţinem problema O.785 din G.M. 3/1995. În enunţul acestei probleme este omisă condiţia ca cele două poligoane să fie la fel orientate, condiţie esenţială după cum se poate constata, chiar pentru cazul $n=3$.

Fie $A(-2)$, $B(2)$, $C(2i\sqrt{3})$, $A'(-1+5i\sqrt{3})$, $B'(1+5i\sqrt{2})$, $C'(4i\sqrt{3})$.

Deci triunghiurile ABC şi $A'B'C'$ sunt echilaterale.

Atunci mijloacele segmentelor (AA'), (BB'), (CC') sunt

$$A''\left(-\frac{3}{2}+\frac{5}{2}i\sqrt{3}\right),\ B''\left(\frac{3}{2}+\frac{5}{2}i\sqrt{3}\right),\ C''(3i\sqrt{3})$$

cu $A''B''=3$, $A''C''=\sqrt{3}$.

Deci $\Delta A''B''C''$ nu poate fi echilateral.

INTERESTING PLANE GEOMETRY PROBLEMS

Abstract. In this paper we use complex numbers to solve and generalize some plane geometry problems.

BIBLIOGRAFIE

1. BĂTINEŢU, D.M. şi Colab., Probleme date la olimpiadele de matematică pentru liceu (1950-1990), Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1992
2. DINCĂ, M., CHIRIŢĂ, M., Numere complexe în matematica de liceu, Editura ALL, Bucureşti, 1995
3. NICULA, V., Numere complexe; probleme şi exerciţii pentru clasa a X-a, Editura Scorpion, Bucureşti, 1993
4. PIMSNER, M., POPA, S., Probleme de geometrie elementară, Editura Tehnică Bucureşti, 1984

Colegiul "Gheorghe Şincai"
Str. Gh. Şincai 25
4800 Baia Mare
ROMANIA

Primit la 1.05.1997