Lucrările Seminarului de
CREATIVITATE MATEMATICĂ
Vol. 7 (1997-1998), 77-82

ŞASE PUNCTE CONCICLICE

Nicolae OPREA

Scopul acestei lucrări este de a pune în evidenţă şase puncte conciclice construite cu ajutorul simedianelor unui triunghi.

Pentru a demonstra teoremele din această lucrare ne vom folosi de următorul rezultat publicat în [1].

Teorema 1. *Dacă într-un triunghi oarecare ABC se duce o ceviană arbitrară AD, $D \in (BC)$, şi dacă o secantă oarecare intersectează pe AB, AC şi AD în punctele M, N respectiv P, atunci există relaţia*

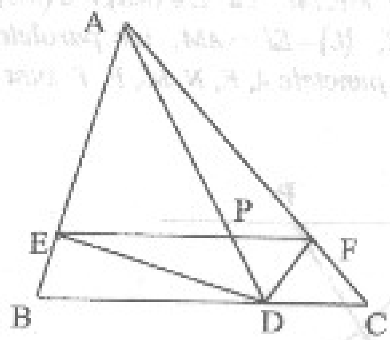
$$\frac{MB}{MA} \cdot DC + \frac{NC}{NA} \cdot BD = \frac{PD}{PA} \cdot BC .$$

În cele ce urmează vom demonstra următoarele rezultate.

Teorema 2. (O generalizare a teoremei înălţimii.) *Dacă într-un triunghi oarecare ABC se duce o ceviană arbitrară AD, $D \in (BC)$, şi dacă DE, DF sunt simediane în triunghiurile ADB respectiv ADC, $E \in (AB)$, $F \in (AC)$, atunci există relaţia*

$$AD^2 = BD \cdot DC \cdot \frac{AP}{PD}.$$

Demonstraţie.



Aplicând Teorema 1 în triunghiul ABC cu ceviana AD şi secanta EF avem

$$\frac{PD}{PA} \cdot BC = \frac{EB}{EA} \cdot DC + \frac{FC}{FA} \cdot BD$$

de unde rezultă relaţia

$$(1) \qquad \frac{PD}{PA} = \frac{EB}{EA} \cdot \frac{DC}{BC} + \frac{FC}{FA} \cdot \frac{BD}{BC}.$$

Deoarece DE este simediană în triunghiul ADB, conform teoremei simedianei avem relația

(2) $$\frac{EB}{EA}=\frac{BD^2}{AD^2}.$$

Analog în triunghiul ADC avem

(3) $$\frac{FC}{FA}=\frac{DC^2}{AD^2}.$$

Din relațiile (1),(2) și (3) rezultă

$$\frac{PD}{PA}=\frac{BD^2}{AD^2}\cdot\frac{DC}{BC}+\frac{DC^2}{AD^2}\cdot\frac{BD}{BC}$$

$$\frac{PD}{PA}=\frac{BD\cdot DC}{AD^2\cdot BC}\cdot(BD+DC)$$

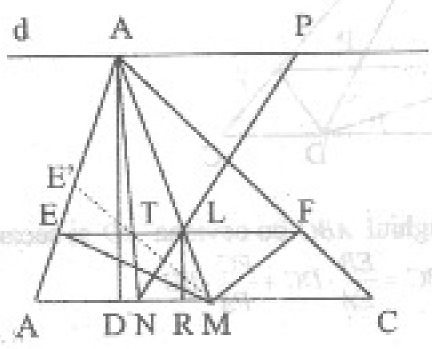
$$\frac{PD}{PA}=\frac{BD\cdot DC}{AD^2\cdot BC}\cdot BC$$

$$AD^2=BD\cdot DC\cdot\frac{AP}{PD}.$$

Observație. Teorema 2 este o generalizare a teoremei înălțimii pentru că dacă $m(\hat{A})=90$ și $AD\perp BC$, atunci simedianele DE și DF sunt înălțimi în triunghiurile dreptunghice ABD respectiv ADC, deci $m(A\hat{E}D)=90$ și $m(D\hat{F}A)=90$. Pe de altă parte $E\hat{D}A=\hat{B}$, $F\hat{D}A=\hat{C}$, și deoarece $m(\hat{B})+m(\hat{C})=90$ rezultă că $m(E\hat{D}F)=90$. Din cele de mai sus rezultă că patrulaterul $AEDF$ este dreptunghi, de unde rezultă că $\frac{AP}{PD}=1$ și înlocuind în Teorema 2 obținem $AD^2=BD\cdot DC$ (teorema înălțimii).

Teorema 3. *Dacă AM și AN sunt respectiv mediana și simediana unui triunghi oarecare ABC și dacă ME, MF cu $E\in(AB), F\in(AC)$ sunt simediane în triunghiurile AMB respectiv AMC, $\{L\}=EF\cap AM$, iar paralela d prin A la BC intersectează pe LN în P, atunci punctele A, E, N, M, F, P sunt conciclice.*

Demonstrație.



Fie E' mijlocul laturii (AB). În triunghiul ABC $E'M$ este linie mijlocie, de unde rezultă că $E'M \| AC$ deci $m(E'\hat{M}B) = m(\hat{C})$. Deoarece EM şi $E'M$ sunt ceviene izogonale în triunghiul AMB, avem

$$m(E\hat{M}A) = m(E'\hat{M}B) = M(\hat{C}).$$

Analog $m(F\hat{M}A) = m(\hat{B})$. Dar

$$m(E\hat{M}F) = m(E\hat{M}A) + m(F\hat{M}A) = m(\hat{C}) + m(\hat{B})$$

de unde rezultă că $m(E\hat{M}F) + m(\hat{A}) = 180$ deci patrulaterul $AEMF$ este inscriptibil. Pe de altă parte deoarece ME este simediană în triunghiul AMB, conform teoremei simedianei avem

$$\frac{AM^2}{BM^2} = \frac{AE}{EB}. \tag{4}$$

Analog pentru triunghiul AMC avem

$$\frac{AM^2}{CM^2} = \frac{AF}{FC}. \tag{5}$$

Dar (6) $BM = CM$. Din relaţiile (4),(5) şi (6) rezultă

$$\frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FC}$$

de unde pe baza reciprocei teoremei lui Thales rezultă că

$$EF \| BC.$$

Vom demonstra în continuare că punctul N aparţine cercului circumscris patrulaterului $AEMF$. Presupunem că N nu aparţine cercului circumscris patrulaterului $AEMF$. Notăm prin Q, unde $Q \neq N$, punctul în care acest cerc intersectează a doua oară dreapta AN. Deoarece $EF \| BC$ şi în triunghiul AEF dreptele AN, AM sunt izogonale, aplicând a doua teoremă a lui Steiner triunghiului AEF cu cevienele izogonale AT şi AL avem

$$\frac{AT^2}{AL^2} = \frac{ET \cdot TF}{EL \cdot LF}. \tag{7}$$

Considerând puterea punctelor T şi L faţă de cercul $AEMF$ obţinem

$$\begin{aligned} ET \cdot TF &= AT \cdot TQ \\ EL \cdot LF &= AL \cdot LM \end{aligned} \tag{8}$$

Din relaţiile (7) şi (8) deducem

$$\frac{AT}{TQ} = \frac{AL}{LM}$$

de unde conform reciprocei teoremei lui Thales rezultă $QM \| EF$; dar $EF \| BC$, deci $QM \| BC$, ceea ce reprezintă o contradicţie. În concluzie N aparţine cercului circumscris patrulaterului $AEMF$.

Pentru a demonstra că şi P aparţine acestui cerc, vom arăta că trapezul $NMPA$ este isoscel, adică demonstrăm că $LN = LM$.

Aplicând Teorema 2 triunghiului ABC cu ceviana AM rezultă

$$AM^2 = BM \cdot MC \cdot \frac{AL}{LM}$$

$$AM^2 = \frac{BC^2}{4} \cdot \frac{AL}{LM}$$

$$\frac{4 \cdot AM^2}{BC^2} = \frac{AL}{LM}$$

$$\frac{4 \cdot AM^2 + BC^2}{BC^2} = \frac{AL + LM}{LM}$$

$$\frac{4 \cdot AM^2 + BC^2}{BC^2} = \frac{AM}{LM}$$

Din ultima relaţie şi din relaţia

$$AM^2 = \frac{2 \cdot (AB^2 + AC^2) - BC^2}{4}$$

obţinem

$$\frac{2 \cdot (AB^2 + AC^2)}{BC^2} = \frac{AM}{LM}$$

de unde rezultă

(9) $$\frac{LM}{AM} = \frac{BC^2}{2 \cdot (AB^2 + AC^2)}.$$

Fie AD înălţimea triunghiului ABC şi LR înălţimea triunghiului LNM. Triunghiurile LRM şi ADM fiind asemenea rezultă

$$\frac{LM}{AM} = \frac{RM}{DM}$$

(10) $$RM = \frac{LM \cdot DM}{AM}$$

În triunghiul dreptunghic ADB avem $BD = AB \cdot \cos \hat{B}$. Din această relaţie şi din teorema cosinusului rezultă

$$BD = AB \cdot \frac{BC^2 + AB^2 - AC^2}{2 \cdot BC \cdot AB}.$$

Dar $DM = BM - BD$, adică

$$DM = \frac{BC}{2} - \frac{BC^2 + AB^2 - AC^2}{2 \cdot BC}$$

de unde deducem că

(11) $$DM = \frac{AC^2 - AB^2}{2 \cdot BC}.$$

Deoarece AN este simediană în triunghiul ABC rezultă

$$\frac{BN}{NC} = \frac{AB^2}{AC^2}$$

$$\frac{BN}{BN + NC} = \frac{AB^2}{AB^2 + AC^2}$$

$$\frac{BN}{BC}=\frac{AB^2}{AB^2+AC^2}$$

$$BN=\frac{BC\cdot AB^2}{AB^2+AC^2}.$$

Dar $NM = BM - BN$, adică

$$NM=\frac{BC}{2}-\frac{BC\cdot AB^2}{AB^2+AC^2}$$

(12) $$NM=\frac{BC\cdot\left(AC^2-AB^2\right)}{2\cdot\left(AB^2+AC^2\right)}.$$

Din relațiile (9),(10) și (11) obținem

$$RM=\frac{BC^2}{2\cdot\left(AB^2+AC^2\right)}\cdot\frac{AC^2-AB^2}{2\cdot BC}$$

(13) $$RM=\frac{BC\left(AC^2-AB^2\right)}{4\cdot\left(AB^2+AC^2\right)}$$

Din relațiile (12) și (13) avem

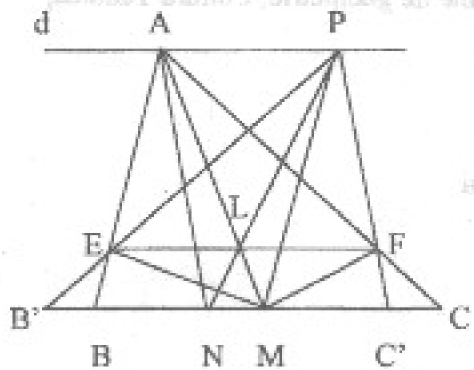
$$NM = 2\cdot RM$$

de unde deducem că înălțimea LR este și mediană în triunghiul LNM, deci acest triunghi este isoscel. Rezultă că și triunghiul ALP este isoscel , adică $AM = PN$, deci trapezul $ANMP$ este isoscel.

În concluzie punctele A,E,N,M,F,P sunt situate pe același cerc.

Consecință. *În condițiile Teoremei 3 considerând* $\{B'\}=BC\cap PE$ *și* $\{C'\}=BC\cap PF$, *tiunghiurile* ABC *și* $PC'B'$ *sunt congruente.*

Demonstrație.



Punctele A,E,F,P fiind conciclice și deoarece $EF \parallel AP$ rezultă că patrulaterul $AEFP$ este un trapez isoscel, de unde rezultă că

(14) $$AE = PF$$

(15) $$AF = PE$$

(16) $$E\hat{P}F = \hat{A}.$$

Pe de altă parte, din teorema lui Thales deducem că

$$\frac{AE}{AB} = \frac{PE}{PB'}$$

$$\frac{PE}{PB'} = \frac{PF}{PC'}.$$

Din ultimele două relaţii şi din egalitatea (14) rezultă că

(17) $$AB = PC'.$$

Analog se deduce că

(18) $$AC = PB'.$$

Din relaţiile (16), (17) şi (18) rezultă că triunghiurile ABC şi $PC'B'$ sunt congruente.

SIX CONCYCLIC POINTS

Abstract. By the help of the simedians of an arbitrary triangle, the author obtained a new set of six concyclic points.

BIBLIOGRAFIE

1. Oprea, N., Ceviene de rang *k*, Gazeta Matematică **XCIV** (1989), 273-277
2. Nicolescu, L., Boskoff, N., Probleme de geometrie, Editura Tehnică, Bucureşti, 1990

Universitaea de Nord din Baia Mare
Catedra de Matematică şi Informatică
Str. Victoriei 76, 4800 Baia Mare
ROMANIA
E-mail: noprea@univer.ubm.ro

Primit la 13. 03. 1998