Lucrările Seminarului de
CREATIVITATE MATEMATICĂ
Vol.7 (1997-1998), 83-88

# SUR UNE LIMITE

**Petru-Avram PETRIŞOR**

1. INTRODUCTION. Dans cette note nous allons démontrer une proposition qui intervient à la transmission des signaux par des canaux aléatoires.

2. PROPOSITION. Si $a \in R$, $a > 1$ et $g_a$ est la fonction

$$g_a:[0,\infty)\to[0,\infty),\ g_a(x)=e^{-ax^2}\int_0^x e^{t^2}\,dt$$

alors on a

a) $\lim\limits_{x\to\infty} x^\gamma\, g_a(x) = 0$ si $\gamma \in [\,0\,,\frac{3}{2}\,)$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} x^\gamma\, g_a(x) = \infty$ si $\gamma \in (\,\frac{3}{2}\,,\infty\,)$

c) Il y a un nombre réel L tel que si $x > L$ alors on a:

$$\frac{\sqrt{x}}{2a}\,e^{(1-a)x^2} < x\sqrt{x}\;g_a(x) \le \frac{1}{8x}\left[\frac{4x^2-2x-1}{ax-1}+\frac{2\sqrt{x}+1}{(a-1)x}\right].$$

DEMONSTRATION. Pour $a > 1$ nous considérons la fonction

$$g_a:[\,0\,,\infty\,)\to[\,0\,,\infty\,),\ g_a(\,x\,)=e^{-ax^2}\int_0^x e^{t^2}\,dt.$$

Avec la substitution $t = x\sqrt{a}\cdot\cos u$ et avec la notation $p = \arccos\sqrt{\frac{1}{a}}$ nous avons

$$g_a(x) = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{p} e^{-ax^2\sin^2 u}\,x\sqrt{a}\,\sin u\,du\,.$$

De $a > 1$ on déduit qu'on a l'inclusion $(p,\frac{\pi}{2}] \subset (0,\frac{\pi}{2}]$ qui nous conduit aux inégalités:

(2.1) $$\frac{2u}{\pi} \le \sin u \le u$$

(2.2) $$-ax^2u^2 \le -ax^2\sin^2 u \le -\frac{4u^2}{\pi^2}\,ax^2$$

(2.3) $$e^{-ax^2\sin^2 u} \le e^{-\frac{4u^2}{\pi^2}ax^2}$$

A l'aide de ces inégalités nous obtenons

(2.4) $$0 < e^{-ax^2\sin^2 u}\sin u \le e^{-\frac{4u^2}{\pi^2}ax^2}\sin u \le e^{-\frac{4u^2}{\pi^2}ax^2}$$

et par intégration nous avons

(2.5) $$0 < g_a(x) \le x\sqrt{a}\int_p^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{4u^2}{\pi^2}ax^2}\,u\,du\,.$$

On note avec A l'intégrale:

$$(2.6) \qquad A = \int_{p}^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{4ax^2}{\pi^2}u^2}\, u\,du$$

A l'aide de la substitution $z = -\frac{4ax^2}{\pi^2}u^2$ nous obtenons l'égalité

$$(2.7) \qquad A = \frac{\pi^2}{8ax^2}\left(e^{-\frac{4ax^2}{\pi^2}p^2} - e^{-ax^2}\right)$$

et par conséquence on peut écrire

$$(2.8) \qquad A \le \frac{\pi^2}{8ax^2}\left(1 - e^{-ax^2}\right)$$

parce que $\quad -\frac{4ax^2}{\pi^2}p^2 \le 0$. Donc nous avons l'inégalité

$$(2.9) \qquad A \le \frac{\pi^2}{8ax^2}.$$

Des relations précédentes on peut écrire

$$(2.10) \qquad 0 < g_a(x) \le \frac{\pi^2}{8x\sqrt{a}}.$$

La fonction $g_a$ vérifie l'équation différentielle suivante

$$(2.11) \qquad g_a'(x) + 2axg_a(x) - e^{(1-a)x^2} = 0$$

et en plus on connait de la définition de la fonction $g_a$ la relation

$$(2.12) \qquad 0 < g_a(x) \le \frac{x}{e^{(a-1)x^2}}.$$

La fonction $g_a$ étant continue sur $[0, \infty)$ et $g_a(0) = 0$ en employant (2.12) on déduit que nous avons

$$(2.13) \qquad \lim_{x\to\infty} g_a(x) = 0$$

et par conséquence il y a a l'ensemble $B \subset [0, \infty)$ tel que, si $x \in B$ est arbitraire, on a $g_a'(x) = 0$. On note avec $x_0$ le plus petit élément de l'ensemble B. De $g_a'(0) = 1$ nous déduisons l'inégalité

$$(2.14) \qquad g_a'(x) \ge 0 \ (\forall)\ x \in (0, x_0]$$

c'est à dire la fonction $g_a$ est croissante sur l'interval $(0, x_0]$.

De l'inégalité $g_a'(x) \ge 0$ et de l'égalité (2.11) nous avons

$$(2.15) \qquad -2axg_a(x) + e^{(1-a)x^2} \ge 0 \ (\forall)\ x \in (0, x_0]$$

qui montre que si $a > 1$ et $x \in [0, x_0]$ les relations suivantes ont lieu :

$$(2.16) \qquad 0 < g_a(x) \le \frac{1}{2ax}e^{(1-a)x^2}.$$

On considère la fonction $h_a$:

$$h_a : (0,\infty) \to R\ ,\ h_a(x) = e^{ax^2}\left[ g_a(x) - \frac{1}{2ax} e^{(1-a)x^2} \right]$$

On a

$$(2.17) \qquad h_a^{'}(x) = \frac{e^{x^2}}{a}\left(\frac{1}{2x^2} + a - 1\right)$$

et par conséquence nous avons $h_a^{'}(x) > 0$ , c'est-à-dire la fonction $h_a$ est croissante.

De l'expression de la fonction $g_a^{'}$ et de l'égalité $g_a^{'}(x_0) = 0$ , nous obtenons

$$(2.18) \qquad -2ax_0 g_a(x_0) + e^{(1-a)x_0^2} = 0$$

et de (2.18) on obtient

$$(2.19) \qquad h_a(x_0) = e^{ax_0^2}\left[ g_a(x_0) - \frac{1}{2ax_0} e^{(1-a)x_0^2} \right] =$$

$$= e^{ax_0^2}\left[ \frac{1}{2ax_0} e^{(1-a)x_0^2} - \frac{1}{2ax_0} e^{(1-a)x_0^2} \right] = 0 .$$

Tenant compte que $h_a$ est croissante sur ( 0 , ∞ ) on trouve pour $x > x_0$ que $h_a(x) > h_a(x_0)$ et donc nous avons

$$(2.20) \qquad h_a(x) > 0 \ \ (\forall)\ x \in (x_0, \infty) .$$

De (2.20) pour $x > x_0$ nous avons la relation

$$(2.21) \qquad g_a(x) > \frac{e^{(1-a)x^2}}{2ax}$$

et pour $x > x_0$ on peut écrire

$$(2.22) \qquad \frac{e^{(1-a)x^2}}{2a} < x g_a(x) \le \frac{\pi^2}{8\sqrt{a}}$$

en employant (2.10) et (2.21).

On a les égalités

$$(2.23) \qquad g_a(x) = e^{-ax^2}\int_0^{\sqrt{x}} e^{t^2}\,dt + e^{-ax^2}\int_{\sqrt{x}}^{x} e^{t^2}\,dt$$

$$(2.24) \qquad \int_{\sqrt{x}}^{x} e^{t^2}\,dt = \int_{\sqrt{x}}^{x} \frac{d(e^{t^2})}{2t} = \frac{e^{x^2}}{2x} - \frac{e^{x}}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2}\int_{\sqrt{x}}^{x} \frac{e^{t^2}}{t^2}\,dt$$

puisque nous avons l'égalité

$$(2.25) \qquad \frac{d\left(e^{t^2}\right)}{2t} = d\left(\frac{e^{t^2}}{2t}\right) + \frac{e^{t^2}}{2t^2}$$

et donc on a

$$(2.26) \qquad \int_{\sqrt{x}}^{x} e^{t^2}\,dt = \frac{e^{x^2}}{2x} - \frac{e^{x}}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{4}\int_{\sqrt{x}}^{x} \frac{d(e^{t^2})}{t^3}$$

et en tenant compte d'inégalité

$$(2.27)\qquad \int_0^{\sqrt{x}} e^{t^2}\,dt \le e^x\sqrt{x}$$

nous obtenons.

$$(2.28)\qquad g_a(x) \le e^{-ax^2} e^x \sqrt{x} + e^{-ax^2}\left(\frac{e^{x^2}}{2x} - \frac{e^x}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{4}\int_{\sqrt{x}}^{x} \frac{d(e^{t^2})}{t^3}\right)$$

qu'on peut écrire sous la forme suivante

$$(2.29)\qquad g_a(x) < e^{-ax^2} e^x \sqrt{x} + e^{-ax^2}\left(\frac{e^x}{2x} - \frac{e^x}{2\sqrt{x}} + \frac{e^{x^2} - e^x}{4x\sqrt{x}}\right)$$

puisque $\sqrt{x} \le t \le x$ et donc $\frac{1}{t^3} \le \frac{1}{x\sqrt{x}}$. De (2.29) nous déduisons que nous avons

$$(2.30)\qquad g_a(x) \le \frac{4x^2 - 2x - 1}{4x\sqrt{x}} e^{x - ax^2} + \frac{2\sqrt{x} + 1}{4x\sqrt{x}} e^{(1-a)x^2}.$$

Soit maintenant, la fonction

$$f: (\ln 2, \infty) \to R,\ f(x) = e^x - 2x.$$

Pour cette fonction nous avons $f''(x) = e^x > 0$ et donc la fonction f ' est croissante , c'est-a dire

$$(2.31)\qquad f'(x) > f'(\ln 2) = e^{\ln 2} - 2 = 0$$

et par conséquence f est une fonction croissante.

La définition de la fonction f nous indique que pour $x > \ln 2$ il y la relation suivante

$$(2.32)\qquad f(x) > f(\ln 2) = e^{\ln 2} - 2\ln 2 = 2\ln\frac{e}{2} > 0$$

et donc nous avons $e^x > 2x$ si $x > \ln 2$. Si nous notons

$$(2.34)\qquad s = \max\left(\frac{1 + \sqrt{1 + a\ln 16}}{2a}, \sqrt{\frac{\ln 2}{a-1}}\right)$$

alors pour $x > s$ nous avons

$$(2.35)\qquad ax^2 - x > \ln 2$$

$$(2.36)\qquad (a-1)x^2 > \ln 2$$

et donc on peut écrire

$$(2.37)\qquad e^{ax^2 - x} > 2(ax^2 - x)$$

$$(2.38)\qquad e^{(a-1)x^2} > 2(a-1)x^2$$

c'est-à-dire pour $x > s$ nous avons la relation

$$(2.39)\qquad 0 < g_a(x) \le \frac{4x^2 - 2x - 1}{4x\sqrt{x}}\,\frac{1}{2(ax^2 - x)} + \frac{2\sqrt{x} + 1}{4x\sqrt{x}}\,\frac{1}{2(a-1)x^2}$$

qui conduit à la relation suivante

$$(2.40)\qquad 0 < x^7 g_a(x) \le \frac{x^7}{x\sqrt{x}}\left(\frac{4x^2 - 2x - 1}{8ax^2 - 8x} + \frac{2\sqrt{x} + 1}{8(a-1)x^2}\right)\ (\forall)\ x \in (s, \infty).$$

Il faut analyser les cas suivants,

a. $0 \le \gamma < \dfrac{3}{2}$.

Dans ce cas par l'utilisation de la relation (2.40) nous obtenons

$$\text{(2.41)} \qquad \lim_{x\to\infty} x^{\gamma} g_a(x) = 0 .$$

b. $\gamma > \dfrac{3}{2}$.

Dans ce cas par l'utilisation de la relation (2.22) nous avons l'inégalité

$$\text{(2.42)} \qquad x^{\gamma} g_a(x) > \frac{x^{\gamma-1}}{2ae^{(a-1)x^2}}$$

et ayant en vue que la fonction $\dfrac{e^{(1-a)x^2}}{2a}$ est bornée et que $\gamma > 1$ nous déduisons qu'il y a l'égalité.

$$\text{(2.43)} \qquad \lim_{x\to\infty} x^{\gamma} g_a(x) = \infty .$$

De la relation (2.22) nous avons pour $x > x_0$ l'inégalité

$$\text{(2.44)} \qquad \frac{\sqrt{x}}{2a} e^{(1-a)x^2} < x\sqrt{x} g_a(x)$$

et de la relation (2.40) nous obtenons l'inégalité

$$\text{(2.45)} \qquad x\sqrt{x} g_a(x) \le \frac{1}{8x}\left[\frac{4x^2-2x-1}{ax-1} + \frac{2\sqrt{x}+1}{(a-1)x}\right]$$

si $x > \max\left(\dfrac{1+\sqrt{1+a\ln 16}}{2a}, \sqrt{\dfrac{\ln 2}{a-1}}\right)$.

On définit le nombre L par l'inégalité

$$\text{(2.46)} \qquad L = \max\left(x_0, \frac{1+\sqrt{1+a\ln 16}}{2a}, \sqrt{\frac{\ln 2}{a-1}}\right)$$

et en conséquence nous avons

$$\text{(2.47)} \qquad \frac{\sqrt{x}}{2a} e^{(1-a)x^2} < x\sqrt{x} g_a(x) \le \frac{1}{8x}\left[\frac{4x^2-2x-1}{ax-1} + \frac{2\sqrt{x}+1}{(a-1)x}\right]$$

si $x > L$ qui achève la démonstration de la preposition.

## SUR UNE LIMITE

**Abstract.** Dans cette note nous allons démontrer une proposition qui intervient a la transmission des signaux par des canaux aléatoires.

## BIBLIOGRAPHIE

1. **ROŞCULEŢ, M.,** Analiză matematică, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1984

2. **SPĂTARU, AL,** Teoria Transmisiunii informaţiei, Vol. I, Editura Tehnică, Bucureşti 1968

Academia Trupelor de Uscat Sibiu
Str. M. Hochmeister 1
2400 Sibiu
ROMANIA

Primit la 12.12.1996