Lucrările Seminarului de
CREATIVITATE MATEMATICĂ
Vol. 7 (1997-1998), 89-96

ASUPRA UNOR ECUAŢII ÎN NUMERE ÎNTREGI

Maria S. POP

Scopul prezentei note este de a da o metodă unitară de rezolvare a unor ecuaţii în numere întregi.

Pentru început prezentăm câteva **probleme** apărute în ultimele numere ale unor reviste de matematică, culegeri de probleme sau date la unele concursuri şcolare.

1. ([5], E: 10984, Gh. Moţoc)

Rezolvaţi în $Z \times Z$ ecuaţia $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{5}$

2. ([4], C: 1814)

Rezolvaţi în $Z \times Z$ ecuaţia $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{1996}$

3. ([3], PP: 262, Popovici Fl., Beneze M.)

Rezolvaţi în N^{*2} ecuaţia $\frac{3}{7}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$

4. ([3], PP: 263, Popovici Fl., Beneze M.)

Rezolvaţi în N^{*2} ecuaţia $\frac{3}{5}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$

5. ([6], Probleme recapitulative)

Să se găsească numerele raţionale $\frac{1}{x}$ şi $\frac{1}{y}$, a căror sumă este egală cu $0,(0043992)$.

6. ([7], Capitolul XII, Problema 48)

Să se rezolve în numere întregi pozitive ecuația $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}$.

7. ([2], Capitolul XII, Problema 47)

Să se rezolve în numere întregi ecuația $x+y=xy$.

8. ([1], Problema V55:1)

Să se rezolve în numere întregi ecuația

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{a}$$

unde a este un număr întreg dat.

9. Să se rezolve în numere întregi ecuația

$$\frac{3}{x}+\frac{8}{y}=1$$

(Olimpiada județeană, Suceava, 1993)

10. Aflați $x,y\in\mathbb{Z}$ știind că $2x+3y=1985-xy$

(Olimpiada județeană, Covasna, 1993)

Problemele 1-9 ca și altele se încadrează în următorul tip.

Să se rezolve în $\mathbb{Z}^{*2}$ *(sau* $\mathbb{N}^{*2}$ *) ecuația*

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=\frac{c}{d} \tag{1}$$

unde $a,b,c,d\in\mathbb{N}^*$; $(c,d)=1$; $(a,b,c)=1$.

Soluție. Ecuația (1) poate fi scrisă

$$ady+bdx=cxy$$

care înmulțită cu c și adunându-i în ambii membrii abd^2 poate fi scrisă sub forma

$$(cx-ad)(cy-bd)=abd^2.$$

Rezultă de aici că ecuația are soluții întregi dacă există divizorii întregi (naturali) u şi v ai numărului abd^2 cu proprietăţile că

$$(2) \qquad \begin{cases} uv = abd^2;\ u \neq -ad;\ v \neq -bd \\ c \text{ divide numerele } ad+u \text{ şi } bd+v \end{cases}$$

În aceste condiţii mulţimea soluţiilor este

$$(3) \qquad S=\left\{\left(\frac{ad+u}{c}, \frac{bd+v}{c}\right), \text{unde } u\,/\,abc^2; v=\frac{abd^2}{u}; u \neq -ad; c\,/\,ad+u, bd+v\right\}.$$

În continuare prezentăm câteva observaţii cu exemplificări în unele **cazuri particulare.**

Cazul 1°. Luând în ecuaţia (1) $a = b = c = 1$ obţinem **problema 8.** Ecuaţia, simetrică în x şi y

$$(4) \qquad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{d}$$

are întotdeauna soluţii şi anume

$$S = \left\{\left(d+u, d+\frac{d^2}{u}\right), \quad \text{unde} \quad u \mid d^2;\ u \neq -d\right\}.$$

Considerând funcţia $\tau : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ care prin $\tau(n)$ desemnează numărul divizorilor naturali ai numărului natural nenul n, remarcăm că ecuaţia (4) are $2\tau(d^2) - 1$ soluţii.

În particular, dacă d este un număr prim, atunci ecuaţia (4) are cinci soluţii în $\mathbb{Z}^{*2}$ şi doar trei în $\mathbb{N}^{*2}$ după cum rezultă din tabelul de mai jos.

u	$-d^2$	-1	d	1	d^2
v	-1	$-d^2$	d	d^2	1
$x = d + u$	$d(1-d)$	$d-1$	$2d$	$d+1$	$d(d+1)$
$y = d + \dfrac{d^2}{u}$	$d-1$	$d(1-d)$	$2d$	$d(d+1)$	$d+1$

Dacă d = 1, atunci ecuaţia (4) are singura soluţie (1,1). Menţionăm că şi **problema 7** se încadrează în acest tip dar mai are în plus soluţia (0,0).

Notăm prin S_k mulţimea soluţiilor problemei k enunţate în introducerea acestei note.

Problemele 1 şi 6 cer rezolvarea unor ecuaţii de tipul (4) cu d număr prim în Z^{*2} respectiv N^{*2}. În aceste probleme avem $d = 5$ respectiv $d = 2$.

Conform observaţiilor anterioare

$$S_1 = \{(-20,4);\ (4,-20);\ (5,30);\ (30,5);\ (10,10)\}$$

respectiv

$$S_6 = \{(3,6);\ (6,3);\ (4,4)\}.$$

Problema 2 în care $d = 1996$ are 29 de soluţii întrucât $1996 = 2^2 \cdot 499$ şi $\tau(1996^2) = 30$. Mulţimea soluţiilor este

$$S_2 = \left\{ \left(1996 + u, \frac{1996\,(1996 + u)}{u} \right) \text{ unde } u \mid 1996^2 ;\ u \neq -1996 \right\}.$$

Cazul 2°. Ecuaţia (1) pentru $a = b = 1$ şi $c, d \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ devine

(5) $$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{c}{d}$$

şi are soluţiile

$$S = \left\{\left(\frac{d+u}{c}; \frac{d+u}{c}\right) \quad unde \quad u \mid d^2;\ u \neq -d;\ v = \frac{d^2}{u};\ c \mid d+u;\ c \mid d+v\right\}.$$

În particular, dacă d este număr prim avem cel mult 5 soluţii în $\mathbb{Z}^{*2}$ şi anume

- dacă $c = 2$ atunci cum $(c, d) = 1$, d este impar, deci $c \mid (d-1)$ şi $c \mid (d+1)$; în acest caz ecuaţia are 5 soluţii

$$S = \left\{\left(\frac{d-1}{2}, \frac{d(1-d)}{2}\right); \left(\frac{d(1-d)}{2}, \frac{d-1}{2}\right); (d,d); \left(\frac{d+1}{2}, \frac{d(d+1)}{2}\right); \left(\frac{d(d+1)}{2}, \frac{d+1}{2}\right)\right\}$$

- dacă $c \neq 2$ şi $c \mid (d-1)$ respectiv $c \neq 2$ şi $c \mid d+1$, atunci ecuaţia (5) are două soluţii

$$S = \left\{\left(\frac{d-1}{c}, \frac{d(1-d)}{c}\right); \left(\frac{d(1-d)}{c}, \frac{d-1}{c}\right)\right\}; \quad S \cap \mathbb{N}^{*2} = \emptyset$$

respectiv

$$S = \left\{\left(\frac{d+1}{c}, \frac{d(1+d)}{c}\right); \left(\frac{d(1+d)}{c}, \frac{d+1}{c}\right)\right\}; \quad S \subseteq \mathbb{N}^{*2}$$

- dacă $c \neq 2$ iar $c \nmid d-1$; $c \nmid d+1$, atunci ecuaţia (5) nu are soluţii, $S = \emptyset$.

Exemple. a) Ecuaţia din **problema 3**, întrucât $c = 3$, $d = 7$ şi $c \mid d-1 = 6$, are două soluţii în $\mathbb{Z}^{*2}$, $\{(-14, 2); (2, -14)\}$, şi deci nu are soluţii în mulţimea $\mathbb{N}^{*2}$ indicată în enunţ. Mulţimea soluţiilor ei fiind $S_3 = \emptyset$.

b) Ecuaţia din **problema 4**, cum $c = 3$; $d = 5$ şi $c \mid d+1 = 6$, are două soluţii în N^{*2}, $S_4 = \{(2,10);(10,2)\}$.

c) **Problema 5**, cum $0,(0043992) = \dfrac{4888}{1111111}$, conduce la ecuaţia

$\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{4888}{1111111}$, rezolvarea căreia nu prezintă dificultate pentru $x, y \in Q^*$

cum s-a cerut în enunţ; ea are o infinitate de soluţii de forma $\left(\dfrac{1}{\alpha}, \dfrac{4888\alpha}{1111111} - 1\right)$

unde $\alpha \in Q \setminus \left\{\dfrac{1111111}{48888}\right\}$.

În Z^{*2} însă, această ecuaţie nu are soluţii întrucât $d = 1111111$ este număr prim şi $c = 4888 = 8 \cdot 13 \cdot 47$ nu divide nici pe $d-1$ şi nici pe $d+1$.

Cazul 3°. În ecuaţia (1) particularizarea $d = 1$ conduce la ecuaţia

(6) $$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = c$$

care are soluţiile de forma $\left(\dfrac{a+u}{c}, \dfrac{b+v}{c}\right)$ în cazul în care există (u,v) astfel încât

$uv = ab$; $u \neq -a$ şi deci $v \neq -b$ şi $c \mid a+u$, $b+v$.

În particular, pentru $c = 1$ ecuaţia (6) are $2\tau(ab) - 1$ soluţii, mulţimea lor fiind

$$S = \{(a+u, b+v) \quad unde \quad uv = ab;\ u \neq -a\}$$

Ca exemplu, **problema 8** în care $a = 3$; $b = 8$; $c = d = 1$ ne conduce uşor la 15 soluţii

$$S_8 = \left\{\left(3+u, \frac{8(3+u)}{u}\right) \ unde \ u \mid 24;\ u \neq -3\right\},$$

mulţime redată în următorul tabel

u	-24	-12	-8	-6	-2	-1	1	2	3	4	6	8	12	24
v	-1	-2	-3	-4	-12	-24	24	12	8	6	4	3	2	1
$x=3+u$	-21	-9	-5	-3	1	2	4	5	6	7	9	11	15	27
$y=8+v$	7	6	5	4	-4	-12	32	20	16	14	12	11	10	9

În fine, **problema 9** reprezintă o ecuaţie diofantică de tipul

(7) $$ax + by = d + cxy$$

$a,b,c,d \in \mathbb{Z}$.

Cu un artificiu de calcul asemănător soluţionării ecuaţiei (1) scriem ecuaţia (7) sub forma

(8) $$(cx - b)(cx - a) = ab - cd$$

Fie u un divizor al numărului $(ab - cd)$ şi fie $v = \dfrac{ab - cd}{u}$.

Dacă

(9) $$c \mid b + u \quad \text{şi} \quad c \mid a + v$$

atunci perechea $\left(\dfrac{b+u}{c}, \dfrac{a+v}{c}\right)$ este o soluţie a ecuaţiei (7). Avem atâtea soluţii câţi divizori ai lui $ab - cd$ îndeplinesc condiţiile (9).

În particular, pentru $c = 1$ sau $c = -1$ ecuaţia are $2\tau(ab - cd)$ soluţii.

Dacă $ab = cd$ şi $c \mid a$ *sau* $ab = cd$ *şi* $c \mid b$ atunci problema are o infinitate de soluţii de forma

$$\left\{\left(\alpha, \frac{a}{d}\right);\ \alpha \in \mathbb{Z}\right\} \quad \textit{respectiv} \quad \left\{\left(\frac{b}{d}, \alpha\right);\ \alpha \in \mathbb{Z}\right\}.$$

În caz contrar ecuaţia nu are soluţii. De fapt, se demonstrează că ecuaţia (7) are soluţii dacă şi numai dacă cel mai mare divizor comun al numerelor a,b şi c divide pe d.

Ca exemplu, în **problema** 9 având $a = 2$; $b = 3$; $c = -1$; $d = 1985$, cum $ab - cd = 1991 = 11 \cdot 181$ avem 8 soluţii

$S_9 = \{(1988, -1); (178, 9); (8, 179); (-2, 1989); (-4, 1993); (-14, -183); (-184, -183); (-1994, -3)\}$

Observăm că pentru $d = 0$ regăsim ecuaţia de tip (6) căreia îi convine şi soluţia (0,0).

Unele observaţii asupra ecuaţiei (7) se găsesc şi în lucrarea [7].

SOLVING EQUATIONS IN THE SET OF INTEGERS

Abstract. This paper gives a general method for solving, in the set of integers, equations of the type $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = \frac{c}{d}$, where $a,b,c,d \in \mathbb{N}^*$, $(c, d) = 1$, $(a, b, c) = 1$.

The method is presented together with many exercises, which were published in several mathematical magazines or were proposed at school contests.

BIBLIOGRAFIE

1. **CUCUREZEANU, I.**, Probleme de aritmetică şi teoria numerelor, Editura tehnică, Bucureşti 1976
2. **NĂSTĂSESCU, C., NIŢĂ, C., BRANDIBORU, M., JOIŢA, D.,** Exerciţii şi probleme de algebră, E.D.P., Bucureşti
3. **OCTOGON MATH. MAGAZINE**, Vol. **4**, No.2 (1996), Braşov, 70
4. **Gazeta Matematică** Seria B **CI**(1996), 322
5. **Gazeta Matematiucă** Seria B **C**(1995), 322
6. **Algebră,** Manual pentru clasa a IX-a, E.D.P., Bucureşti 1989
7. **JAKUBINYI, E.,** Asupra unor ecuaţii în numere întregi, G.M., Seria B, **LXXXII**(1977), 271

Universitatea de Nord din Baia Mare
Catedra de Matematică şi Informatică
Str. Victoriei 76, 4800 Baia Mare
ROMANIA
E-mail: mspop@univer.ubm.ro

Primit la 15.09.1997