Lucrările Seminarului de
CREATIVITATE MATEMATICĂ
Vol. 7 (1997-1998), 111-116

APLICAREA CALCULULUI DIFERENŢIAL ŞI INTEGRAL ÎN PROBLEME DE FIZICĂ ŞI MECANICĂ

Ioana TAŞCU

În manualele de liceu actuale sunt insuficient ilustrate problemele practice în rezolvarea cărora se foloseşte calculul diferenţial, respectiv calculul integral.

Scopul lucrării este exemplificarea prin câteva probleme concrete din fizică şi mecanică a aplicării analizei matematice.

I. Aplicaţii ale calculului diferenţial

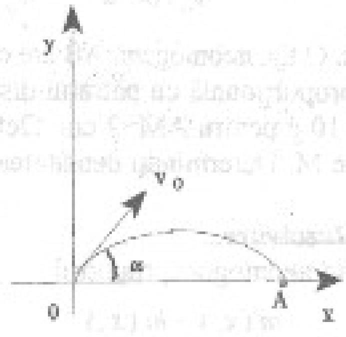
1. Legea de mişcare a unui punct material lansat cu unghiul α şi viteza iniţială v_0 este dată de formulele

$$\begin{cases} x = v_0 t \cos\alpha \\ y = v_0 t \sin\alpha - \dfrac{g t^2}{2} \end{cases}$$

unde t este timpul, g acceleraţia gravitaţională.

Să se găsească traiectoria mişcării şi bătaia aruncării. De asemenea, să se găsească mărimea vitezei de mişcare şi direcţia sa.

Rezolvare. Pentru a determina traiectoria, trebuie să eliminăm parametrul t în ecuaţiile date şi obţinem



$$t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$$

deci

$$y = x\, tg\, \alpha - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2\alpha} \cdot x^2$$

Bătaia aruncării este abscisa punctului A, deci luăm $y = 0$ şi obţinem $\frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$. Dacă împărţim curba OA în părţi mici astfel încât pe o porţiune deplasarea să fie aproape dreaptă atunci viteza pe porţiuni este $v = \frac{ds}{dt}$, unde ds este deplasarea şi dt intervalul de timp:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{ds}{dt}$$

Deci viteza este un vector de componente $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right)$, iar mărimea sa este

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2} \quad \text{adică} \quad \sqrt{v_0^2 - 2 v_0 t \cdot g \sin\alpha + t^2 g^2}.$$

Vectorul viteză este pe tangenta la traiectorie, deci coeficientul unghiular al vectorului viteză este

$$y' = tg.\ \alpha - \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha} \cdot x = tg\ \alpha - \frac{g}{v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha} \cdot v_0 \cdot t \cdot \cos\ \alpha =$$

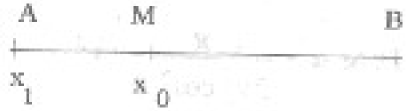
$$= tg\ \alpha - \frac{gt}{v_0 \cos\ \alpha} = \frac{v_o \sin\ \alpha - gt}{v_0 \cos\ \alpha}$$

2. O tijă neomogenă AB are o lungime de 12 cm. Masa unei părţi AM a tijei este direct proporţională cu pătratul distanţei de la punctul curent M la extremitatea A şi este de 10 g pentru AM=2 cm. Determinaţi masa tijei AB şi densitatea într-un punct oarecare M. Determinaţi densitatea tijei în extremităţile A şi B.

Rezolvare.

Tija fiind neomogenă, raportul

$$\rho = \frac{m(x_1) - m(x_0)}{x_1 - x_0}$$



se numeşte densitatea medie a porţiunii

AM. Densitatea tijei în punctul de abscisă x_0 este

$$\rho(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{m(x) - m(x_0)}{x - x_0}$$

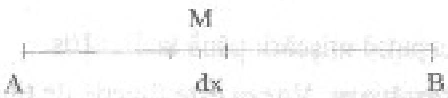
Notăm M masa tijei AB, m masa unei părți și x distanța AM. Avem

$$\frac{m}{x^2} = \frac{10}{4} \to m = \frac{5}{2} x^2$$

$$M = \frac{5}{2} \cdot 144 \Rightarrow M = 360\ g$$

Dacă împărțim tija AB în părți mai mici și alegem o parte de lungime dx și masă dm atunci

$$\rho_M = \lim_{dx \to 0} \frac{dm}{dx}$$



adică $\rho_M = m'(x)$

(derivata masei în raport cu distanța $x = AM$)

$$\rho_M = 5x \frac{g}{cm},\ \rho_A = 0\ g/cm,\ \rho_B = 60\ g/cm$$

3. Într-un vas conținând o soluție de nitrat de argint se introduc doi electrozi conectați la bornele unui acumulator. Măsurând (în miligrame) cantitatea de argint q(t) depusă la catod în t secunde, se constată că ea verifică relația $q(t) = \ln(1+t)$. Știind că q(t) este proporțional cu cantitatea de electricitate Q(t) (măsurată în coulombi) să se determine intensitatea curentului electric care trece prin soluție la $t = 0$ și la $t = 2$ (coeficientul de proporționalitate este 1,118).

Rezolvare. Cantitatea de electricitate Q(t) nefiind constantă, raportul

$$\frac{Q(t_2) - Q(t_1)}{t_2 - t_1}$$

se numește curent mediu în intervalul de timp $[t_2, t_2]$. Intensitatea curentului electric la momentul t_0 este

$$I(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{Q(t) - Q(t_0)}{t - t_0} = Q'(t_0)$$

$$Q(t) = 1{,}118\, q(t) = 1{,}118 \cdot \ln(1+t)$$

$$I(t_0) = 1{,}118 \cdot \frac{1}{1+t_0}$$

$$I(0) = 1{,}118\, A$$

$$I(2) \approx 0{,}373\, A$$

II. Aplicaţii ale calculului integral

1. Viteza unui punct este $v = 0{,}1\, t^3 \frac{m}{s}$. Calculaţi drumul s parcurs de punct de la începutul mişcării până la T = 10s.

Rezolvare. Viteza este funcţie de timp $v = f(t)$

$$s = \int_{t_1}^{t_2} f(t)\, dt$$

$$s = \int_0^{10} 0{,}1\, t^3\, dt = 0{,}1 \left. \frac{t^4}{4} \right|_0^{10} = 250\ (m)$$

2. Ce lucru mecanic trebuie făcut pentru alungirea unui arc de 6 cm, dacă pentru o forţă de 1 kg resortul se alungeşte cu 1 cm.

Rezolvare. Forţa este o funcţie de alungire $F = f(x)$. Lucrul mecanic este $L = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx$. Legea lui Hooke: $F = kx$, unde k este coeficient de alungire

$$\left.\begin{array}{l} x = 0{,}01\, m \\ F = 1\, kg \end{array}\right\} \rightarrow k = 100 \quad deci \quad F = 100\, x$$

$$L = \int_0^{0{,}06} 100\, x\, dx = 50\, x^2 \Big|_0^{0{,}06} = 0{,}18\ kgm$$

3. Calculaţi lucrul mecanic necesar pompării apei dintr-o cuvă verticală circulară cu raza bazei R şi înălţimea H.

Rezolvare. Notăm cu x nivelul apei. Forţa elementară este dx, adică $dF = m\pi R^2 dx$, unde m este masa unităţii de volum de apă. Deci lucrul mecanic al forţei elementare este

$$dL = m\pi R^2 (H - x)\, dx \Rightarrow L = \frac{\pi m}{2} R^2 H^2$$

4. Calculaţi lucrul mecanic necesar pentru ridicarea unui corp de masă m la înălţimea h, considerând raza Pământului R.

Rezolvare. Forţa care acţionează asupra corpului de masă m este $F = k\frac{mM}{r^2}$, unde r este distanţa măsurată de la centrul Pământului. Deoarece pentru $r = R$ avem $F = mg \Rightarrow kM = gR^2$. Lucrul mecanic este

$$L = \int_R^{R+h} k\frac{mM}{r^2}\, dr = kmM\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}\right) = \frac{mgh}{1+\frac{h}{R}}$$

5. Determinaţi presiunea exercitată pe un baraj semicircular de rază r scufundat vertical în apă.

Rezolvare. Împărţim semicercul în fâşii paralele, aria unui element aflat la distanţa h fiind

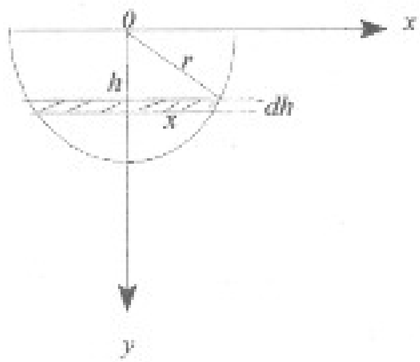
$$ds = 2x\,dh = 2\sqrt{r^2 - h^2}\, dh$$

Presiunea exercitată pe baraj în această porţiune este

$$dP = h\,ds = 2h\sqrt{r^2 - h^2}\, dh$$

(am considerat greutatea specifică a apei 1).

Atunci



$$P = 2\int_0^r h\sqrt{r^2 - h^2}\,dh = -\frac{2}{3}(r^2 - h^2)\Big|_0^r = \frac{2}{3}r^3 .$$

APPLIED MATHEMATICS

Abstract. In this paper I propose some problems to illustrate various applications of differential and integral calculus.

BIBLIOGRAFIE

1. DÉMIDOVITCH, B., Recueil d'exercices et de problemes d'analyse mathématique, Edit. MIR, 1974

2. PISKOUNOV, N., Calcul différentiel et intégral, Edit. MIR, 1977

3. * * * Elemente de analiză matematică, Manual pentru cl. a XI-a, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1968

Universitatea de Nord din Baia Mare
Catedra de Matematică şi Informatică
Str. Victoriei 76, 4800 Baia Mare
ROMANIA
E-mail: tascu@univer.ubm.ro

Primit la 15.10.1997