Lucrările Seminarului de
CREATIVITATE MATEMATICĂ
Vol. 7 (1997-1998), 117-126

ASUPRA TOPOLOGIEI DE GRAF STEA ÎN SISTEME DISTRIBUITE

Ioana ZELINA

1. Introducere

Un sistem distribuit(sau o structură distribuită) este format dintr-un număr de procesoare sau noduri(entități de calcul) interconectate printr-un număr de canale sau linii de comunicație. În această descriere pot fi incluse rețele la mare distanță, rețele locale sau mașini paralele cu memorie distribuită. Punctul comun al acestor structuri este absența memoriei centrale: orice schimb de informație se face doar prin mesaje transmise pe liniile de comunicație. O aplicație distribuită se realizează deci cu ajutorul unei mulțimi de procese care, executându-se în noduri diferite, cooperează prin calcule locale pentru realizarea scopului aplicației. Într-un sistem distribuit, noțiunea de proces semnifică o entitate de programare independentă și o unitate de distribuire și execuție cu context propriu. În scopul funcționării sale, procesul face apel, în afara instrucțiunilor obișnuite, la instrucțiuni de comunicație prin mesaje. Setul de reguli și proceduri care guvernează schimbul de mesaje între procesele unui sistem distribuit poartă numele de protocol de comunicație. Un element cheie pentru aceste sisteme este realizarea primitivelor de comunicație.

Difuzarea mesajelor în sisteme distribuite este utilizată pentru a transmite mesaje unui grup de procese astfel încât să fie respectate proprietățile de atomicitate și ordonare. Cu alte cuvinte, toate procesele destinatar trebuie să recepționeze mesajele, iar mesajele trebuie recepționate de nodurile destinatar în ordinea în care au fost transmise.

2. Noțiuni preliminare

Pentru rețeaua de comunicație a unui sistem distribuit se va folosi ca model un graf neorientat în care vârfurile corespund procesoarelor, iar muchiile canalelor de comunicație între procesoare. Există o muchie între două noduri în graf dacă există un canal de comunicație între procesoarele respective în sistemul distribuit. Se va presupune de asemenea că aceste canale de comunicație sunt bidirecționale, adică dacă există un canal de comunicație între vârfurile v_i și v_j , atunci mesajele pot circula de-a lungul muchiei și de la v_i la v_j și de la v_j la v_i.

Definiția 2.1. O rețea de comunicație este reprezentată printr-un graf $G=(V, E)$ unde $V=\{v_1, v_2,\ldots, v_n\}$ este mulțimea vârfurilor, iar E este mulțimea muchiilor, $E=\{(v_i , v_j)| v_i , v_j \in V, j=1, n$ astfel încât există canal de comunicație între v_i și $v_j \}$.

Se vor introduce în continuare câteva noțiuni de teoria grafurilor care se vor folosi în studiul topologiei de rețea de tip stea.

Definiția 2.2. Se numește **gradul unui vârf** v_i în graful $G=(V, E)$ numărul de muchii incidente vârfului v_i . Gradul unui graf G este maximul gradelor vârfurilor sale, d.

Definiția 2.3. Se numește **graf regulat** un graf în care toate vârfurile au același grad.

Definiția 2.4. Se numește **distanță** între două vârfuri v_i și v_j ale unui graf lungimea celui mai scurt drum dintre cele două noduri $l(v_i , v_j)$. Se numește diametrul grafului maximul distanțelor dintre oricare două vârfuri ale grafului, $l = \max\{l(v_i , v_j), v_i , v_j \in V, i,j=1,n\}$.

Clasa de rețele de comunicație care se poate modela prin grafuri simetrice este o clasă foarte atractivă datorită faptului că se pot folosi în sistem procesoare identice.

Definiția 2.5. Un graf se numește **graf simetric relativ la vârfuri** dacă pentru oricare două vârfuri ale grafului v_i și v_j există un automorfism definit pe mulțimea vârfurilor grafului $f: V\rightarrow V$ care transformă vârful v_i în v_j , $f(v_i)=v_j$. Altfel spus, graful se vede la fel din oricare vârf al său.

Definiția 2.6. Un graf se numește **graf simetric relativ la muchii** dacă pentru oricare două muchii a și b există un automorfism care transformă muchia în b. Altfel spus, graful se vede la fel din orice muchie.

În cazul rețelelor de comunicație o proprietate importantă este protecția sistemului la erori sau toleranța la erori(System Fault Tolerance). Această proprietate este legată de capacitatea sistemului de a continua să funcționeze și după apariția în sistem a unor erori(pene).

Definiția 2.7. Un graf G este **f- tolerant la erori**(defecte) dacă subgraful obținut prin eliminarea oricăror f vârfuri ale grafului rămâne conex.

Definiția 2.8. Se numește **toleranță la erori** a grafului G numărul maxim f pentru care G este f-tolerant.

Toleranța la erori a unui graf este un număr cu 1 mai mic decât conectivitatea sa. Toleranța grafului la defecte este cel mult egal cu gradul grafului minus unu. Un graf care are toleranța exact această valoare se numește maxim tolerant.

Esențială într-o rețea de comunicație este existența unor protocoale relativ simple pentru transferul mesajelor. Este de dorit ca protocoalele să utilizeze drumul de lungime minimă între oricare două vârfuri și de asemenea să fie asigurată protecția la erori, adică, în prezența a cel mult f defecte să se poată găsi totuși un drum între două vârfuri.

Definiția 2.9. Se numește **diametru la erori** al grafului G cu toleranța la defecte f, maximul diametrelor subgrafurilor obținute din G prin eliminarea a cel mult f vârfuri.

Definiția 2.10. O familie de grafuri G_n se numește puternic resilientă dacă diametrul la erori al oricărui graf G_n este cel mult l_n+c unde l_n este diametrul grafului G_n , iar c este o constantă.

3. Grafuri stea

Graful stea este un membru al clasei grafurilor Cayley. Pentru definirea acestei clase de grafuri se folosește noțiunea teoretică de grup. Într-un graf din clasa Cayley vârfurile sunt elemente dintr-un grup (V, •), iar muchiile sunt definite prin acțiunile asupra vârfurilor a unei mulțimi de generatori $g=\{g_1 , g_2 ,..., g_n \}\subset V$. Există o muchie între vârful v_i și vârful v_j în grafului G=(V, E) dacă există un generator g_l în mulțimea g astfel încât $v_j = v_i \bullet g_l$. Adăugând faptul că orice generator g_i din mulțimea de generatori g este inversabil în g se garantează comunicarea bidirecțională în graful G.

Pentru definirea grafurilor stea se consideră mulțimea permutărilor de n elemente $P_n=\{s_1s_2...s_n \mid s_i \in \{1, 2,..., n\}, s_i \neq s_j, i\neq j, i,j=\overline{1,n}\}$.

Definiția 3.1. Se numește generator g_i, $i=\overline{2,n}$, în mulțimea permutărilor de n elemente permutarea $g_i = s_1 s_2 \ldots s_n$ unde $s_1 = i$, $s_i = 1$ și $s_j = j$ pentru orice $j\in\{1,2,\ldots,n\}\setminus\{1,i\}$. Cu alte cuvinte numim generator g_i în mulțimea permutărilor de n elemente transpoziția (1i).

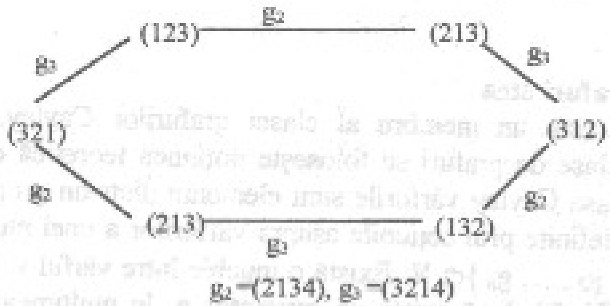
Mulțimea P_n a permutărilor de n elemente împreună cu operația de compunere a permutărilor "o" formează grup. De asemenea, mulțimea transpozițiilor de forma (1i), $i=\overline{1,n}$ este subgrup al grupului permutărilor în raport cu operația de compunere. Fiecare generator g_i este deci inversabil în mulțimea generatorilor, inversul fiind el însuși.

Se poate defini deci un graf Cayley cu vârfuri din mulțimea permutărilor de n elemente și cu muchii definite prin acțiunea asupra vârfurilor a generatorilor, adică a transpozițiilor (1i), $i=\overline{2,n}$. Acțiunea asupra vârfurilor înseamnă operația de compunere.

Definiția 3.2. Se numește **graf stea de ordin n**, $S_n =(P_n ,E_n)$, graful Cayley obținut prin aplicarea generatorilor $g=\{g_2 ,..., g_n\}$ unde generatorul g_i este transpoziția (1i), $i=\overline{2,n}$ asupra elementelor grupului (P_n ,o).

Graful stea este deci graful ale cărui vârfuri sunt etichetate cu permutările de n elemente, iar între două vârfuri σ și τ există muchie dacă τ se obține prin compunerea lui σ cu o permutare (1i), $i=\overline{2,n}$, adică există o valoare $i\in\{2,\ldots n\}$ astfel încât $\tau = \sigma \circ (1i)$. Deci mulțimea muchiilor unui graf stea este $E_n =\{(\tau ,\sigma) \mid \tau ,\sigma \in P_n , \exists\, i \in\{2,\ldots,n\} \text{ a.î. } \tau = \sigma \circ (1i)\}$.

În figurile 2.1a) și 2.1b) sunt prezentate grafurile stea de ordin 3 respectiv 4, S_3, S_4. Fiecare muchie este etichetată prin generatorul care o definește.



$g_2 =(2134)$, $g_3 =(3214)$

Figura 2.1a) S_3

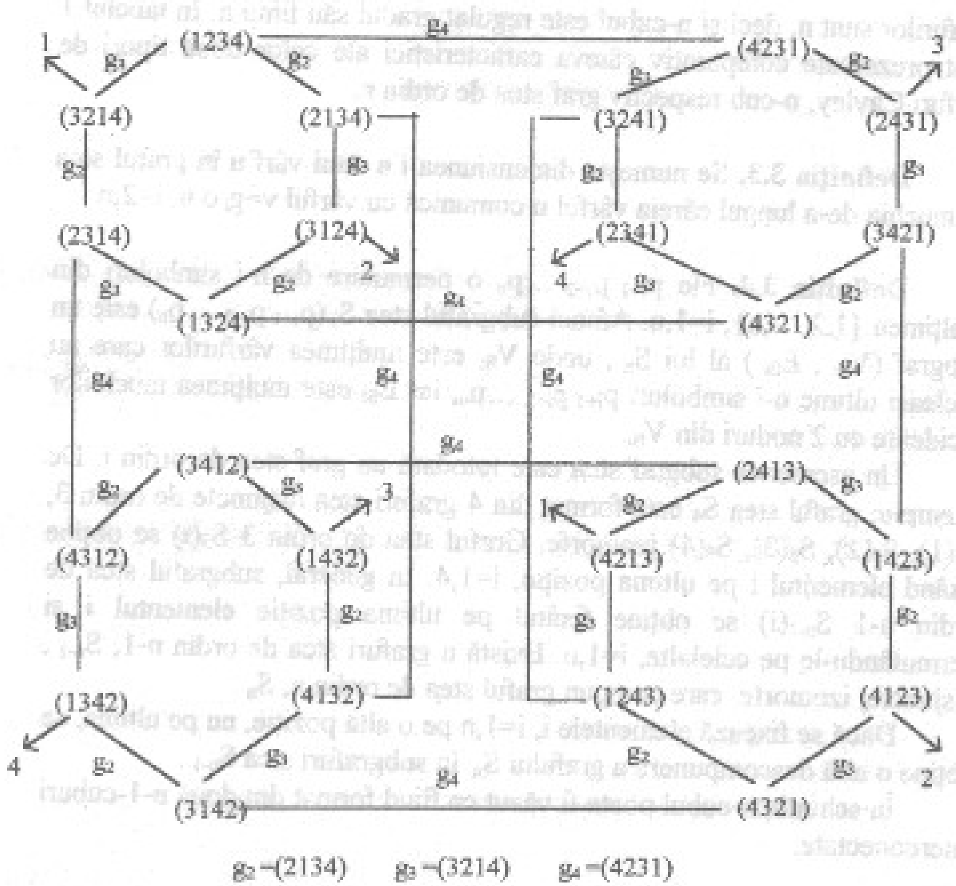


Figura 2. 2b) S_4

Graful stea $S_n = (P_n, E_n)$ de ordin n are deci n! vârfuri. Fiecare vârf are gradul n-1, deci graful stea S_n este regulat de grad n-1. De asemenea S_n este simetric atât relativ la vârfuri cât şi la muchii(acest lucru este demonstrat în [1]). În [2] se demonstrează că diametrul grafului stea S_n este $d_n = \left[\frac{3(n-1)}{2}\right]$. Tot în [2] se demonstrează că distanţa medie între două vârfuri ale grafului stea de ordin n este $a_n = n+2/n+H_n-4$ unde $H_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$.

O topologie de asemenea atractivă şi frecvent utilizată este topologia de n-cub, $C_n = (B_n, E)$ unde B_n este mulţimea şirurilor binare de lungime n, iar E mulţimea muchiilor. Două vârfuri ale cubului u şi v sunt legate printr-o muchie dacă şirurile binare corespunzătoare diferă printr-un singur element. Numărul de vârfuri al unui n-cub este 2^n, iar gradele vârfurilor sunt n, deci şi n-cubul este regulat gradul său fiind n. În tabelul 1 sunt prezentate comparativ câteva caracteristici ale celor două tipuri de grafuri Cayley, n-cub respectiv graf stea de ordin n.

Definiţia 3.3. Se numeşte dimensiunea i a unui vârf u în graful stea S_n muchia de-a lungul căreia vârful u comunică cu vârful $v=g_i \circ u$, $i=\overline{2,n}$.

Definiţia 3.4. Fie $p_{i+1}\, p_{i+2} \ldots p_n$ o permutare de n-i simboluri din mulţimea $\{1,2,\ldots,n\}$, $i=\overline{1,n}$. Atunci subgraful stea $S_i\,(p_{i+1}\, p_{i+2} \ldots p_n)$ este un subgraf (V_{Si}, E_{Si}) al lui S_n, unde V_{Si} este mulţimea vârfurilor care au aceleaşi ultime n-i simboluri $p_{i+1}\, p_{i+2} \ldots p_n$, iar E_{Si} este mulţimea muchiilor incidente cu 2 noduri din V_{Si}.

Un asemenea subgraf stea este totodată un graf stea de ordin i. De exemplu, graful stea S_4 este format din 4 grafuri stea disjuncte de ordin 3, $S_3(1)$, $S_3(2)$, $S_3(3)$, $S_3(4)$ izomorfe. Graful stea de ordin 3 $S_3(i)$ se obţine fixând elementul i pe ultima poziţie, $i=\overline{1,4}$. În general, subgraful stea de ordin n-1 $S_{n-1}(i)$ se obţine fixând pe ultima poziţie elementul i şi permutându-le pe celelalte, $i=\overline{1,n}$. Există n grafuri stea de ordin n-1, S_{n-1}, disjuncte, izomorfe, care compun graful stea de ordin n, S_n.

Dacă se fixează elementele i, $i=\overline{1,n}$ pe o altă poziţie, nu pe ultima, se obţine o altă descompunere a grafului S_n în subgrafuri stea S_{n-1}.

În schimb, n-cubul poate fi văzut ca fiind format din două n-1-cuburi interconectate.

Definiţia 3.5. Un graf se numeşte **graf ierarhic de nivel n** dacă poate fi văzut ca o colecţie de k_n grafuri ierarhice de nivel n-1. Fiecare graf ierarhic de nivel n-1 este un graf mai mic ca dimensiuni.

Un element important în sistem este toleranţa la erori. Dacă apar în sistem erori(pene), procesoarele neafectate de erori devin izolate unele de altele sau continuă să opereze coerent? După cum s-a arătat în lucrarea [1] atât n-cubul cât şi graful stea de ordin n au toleranţa la erori maximă. De asemenea, graful stea este puternic rezilient. Aşa cum se arată în [2] diametrul său creşte cu cel mult 3. Deci, chiar dacă în sistem există erori, diametrul său modificat(distanţa dintre vârfurile neafectate va creşte din cauza eliminării vârfurilor defecte şi a muchiilor corespunzătoare) rămâne mai mic decât diametrul unui n-cub fără defecte(tabelul 1).

Este de interes de asemenea performanţa reţelei în cazul în care numărul de erori f este mai mare decât gradul grafului, $f \geq d-1$. În cazul grafurilor stea de ordin n, S_n s-a demonstrat în [1] că pentru $f < (n-1)(n-2)$ cel mult 3f vârfuri vor fi izolate de restul grafului. Cu alte cuvinte, graful care a avut iniţial n! vârfuri se transformă într-o componentă fără erori cu n!-3f vârfuri. Chiar dacă din graful stea S_n sunt eliminate vârfurile defecte rămân funcționale o mulțime de subgrafuri fără erori.

Dacă $p \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ atunci există în S_n un număr de $C_{n-1}^{p}\, n!(n-p)!$ subgrafuri stea de ordin n-p. Ne interesează câte dintre aceste subgrafuri vor conține vârfuri defecte dacă numărul total de erori în graful S_n este f. Becker și Simon au studiat în [3] această problemă pentru n-cub. Folosind notația lor, fie *f(n,p)* numărul minim de erori pentru care fiecare graf stea de ordin n-p va fi defect. Deci există cel puțin un subgraf stea de ordin n-p nedefect pentru orice număr de erori mai mic decât *f(n,p)*. Se poate demonstra că $f(n,p) \geq \frac{n!}{(n-p)!}$

Topologia	Număr vârfuri	Grad	Diametru	Distanța medie	Diametrul la erori
5- star	120	4	6	3.7	≤ 9
7- cub	128	7	7	3.5	8
7- star	5040	6	9	5.9	≤ 12
12- cub	4096	12	12	6	13
9- star	362880	8	12	8.1	≤ 15
18- cub	262144	18	18	9	19

Tabel 1

În foarte multe aplicații folosite în sisteme distribuite se cere difuzarea de către un nod a unui mesaj către toate celelalte noduri din sistem.

Se va presupune în continuare că un nod este format dintr-un procesor și are canale de comunicație bidirecționale cu toate nodurile cu care comunică. Se presupune de asemenea că la un moment de timp fixat un nod poate comunica cu cel mult un alt nod. Cu aceste presupuneri se poate găsi o limită inferioară pentru ordinul de complexitate a oricărui algoritm de difuzare de mesaje.

Teorema 3.1. Dacă o rețea este formată din N vârfuri(elemente de procesare), atunci orice algoritm de difuzare necesită cel puțin $O(\log_2 N)$ pași.

Demonstrație:

Deoarece inițial un singur nod deține mesajul care se va difuza și la un moment dat un pas în difuzare face ca numărul de noduri ce au recepționat mesajul să se dubleze, cel mult, atunci cel puțin $\lceil \log_2 N \rceil$ pași sunt necesari pentru difuzarea mesajului. În concluzie, marginea inferioară pentru ordinul de complexitate al algoritmului este *O(log₂N)*.

Se va cerceta în continuare care este această limită în cazul grafurilor stea. Se consideră că un algoritm de difuzare constă dintr-o secvență $d = < d_1 , d_2 , d_3 ,\ldots, d_n >$ de dimensiuni de-a lungul cărora se propagă mesajul împreună cu un algoritm care va fi executat de către fiecare nod. În graful stea S_n fiecare muchie adiacentă unui vârf este numerotată cu valori de la 2 la n corespunzător acțiunii generatorilor din mulțimea g.

Algoritmul secvențial constă dintr-o mulțime de pași care sunt executați o dată pentru fiecare element din secvența de dimensiuni. În particular, în pasul i algoritmul secvențial constă în comunicarea cu vârful adiacent de-a lungul dimensiunii d_i și transferul mesajului. În general, oricare dintre vârfurile conectate prin dimensiunea i care deține mesajul îl transmite și celuilalt.

Algoritmul care se va descrie presupune că în graful stea de ordin n, dacă mesajul este deținut inițial de un vârf, el este trimis de-a lungul dimensiunilor $i \in \{2,\ldots, n\}$ către cele n-1 vârfuri adiacente care sunt vârfuri ale subgrafurilor stea de ordin n-1 ce compun graful inițial.

De exemplu, pentru graful stea de ordin 4, S_4 din figura 1a), dacă inițial mesajul rezidă în nodul (1234) și se aplică secvența $< g_1 , g_2 , g_3 >$, se reduce problema difuzării mesajului în graful stea de ordin 4, S_4 la patru probleme paralele de difuzare în grafurile stea de ordin 3, $S_3(1)$, $S_3(2)$, $S_3(3)$, $S_3(4)$. În continuare se generează altă secvență și difuzarea în graful stea de ordin 3, $S_3(i)$, se va reduce la trei probleme de difuzare paralele în subgrafurile stea de ordin 2 ce compun graful stea de ordin 3. Secvența care realizează acest lucru este $< g_2 , g_3 >$. Deoarece un graf stea de ordin 2 este format din două vârfuri conectate printr-o muchie definită de generatorul g_2, este suficientă aplicarea secvenței $< g_2 >$. Din subsecvențele aplicate se formează secvența $< g_2 , g_3 , g_4 , g_2 , g_3 , g_2 >$ care realizează difuzarea corectă a mesajului.

În cazul general fie vârful $(s_1\ s_2\ \ldots\ s_n)$ care deține mesajul ce trebuie difuzat. Secvența $< g_2 , g_3 ,\ldots, g_{n-1} , g_n >$ realizează difuzarea mesajului către cele n subgrafuri stea de ordin n-1 din care este compus graful stea de ordin n. Aceeași metodă se folosește pentru difuzarea mesajului către cele n-1 subgrafuri stea de ordin n-2 ce compun fiecare dintre cele n subgrafuri stea de ordin n-1. Tehnica se aplică până când se ajunge la subgraful stea de ordin 2. În acest moment aplicarea secvenței $< g_2 >$ garantează recepționarea mesajului de către toate vârfurile grafului stea.

Lema 3.1. Dat fiind un graf stea de ordin n în care un nod conține mesajul de difuzat, secvența $< g_2 , g_3 , \ldots, g_{n-1} , g_n >$ împreună cu un algoritm secvențial executat de fiecare vârf așa cum s-a descris anterior, va distribui corect mesajul către cel puțin un vârf din fiecare dintre cele n subgrafuri stea de ordin n-1 care compun graful stea de ordin n.

Demonstrație:

Fie nodul ($s_1\ s_2\ \ldots\ s_n$) care deține mesajul de difuzat. Acest nod este component al subgrafului stea de ordin n-1 care are fixat ca ultim simbol s_n. Deoarece aplicând generatorul g_i se schimbă între ele simbolurile 1 și i, aplicând secvența $< g_2, g_3, \ldots, g_{n-1} >$ asupra acestui vârf se asigură faptul că pentru fiecare simbol care nu este fixat pe ultima poziție în $S_{n-1}(n)$ există un vârf care are acest simbol pe prima poziție. Deoarece g_n schimbă între ele simbolurile de pe pozițiile 1 și n, aplicând acest generator asupra nodurilor care au recepționat deja mesajul va exista un nod în fiecare dintre subgrafurile stea $S_{n-1}(1)$, $S_{n-1}(2)$,..., $S_{n-1}(n)$ care va recepționa mesajul. Dacă luăm în considerare faptul că graful stea este simetric relativ la vârfuri și la muchii, acest algoritm funcționează oricare ar fi nodul inițial ($s_1\ s_2\ \ldots\ s_n$) care deține mesajul.

Teorema 3.2. Pentru un graf stea de ordin n, secvența $secv_n = < g_2, g_3, \ldots, g_{n-1}, g_n, g_2, g_3, \ldots, g_{n-1}, \ldots, g_2, g_3, g_4, g_2, g_3, g_2 >$ împreună cu un algoritm secvențial executat în fiecare nod așa cum s-a descris anterior, constituie un algoritm de difuzare corect(toate nodurile recepționează mesajul).

Demonstrație:

Pentru a demonstra lema se va folosi metoda inducției complete.

Pentru n=2 graful stea S_2 conține doar două vârfuri, (12) și (21) și evident că mesajul este corect difuzat aplicând $<g_2>$.

Presupunem că secvența $secv_{n-1}$ difuzează mesajul corect într-un graf stea S_{n-1}.

Fie secvența $secv_n$ pentru un graf stea de ordin n. Se observă că secvența $secv_n = < g_2, g_3, \ldots, g_{n-1}, g_n, g_2, g_3, \ldots g_{n-1}, \ldots, g_2, g_3, g_4, g_2, g_3, g_2 >$ este formată din subsecvențele $secv_{n-1}$ și $< g_2, g_3, \ldots, g_{n-1}, g_n >$. Din lema 3.2 rezultă că această a doua secvență realizează difuzarea corectă a mesajului către n subgrafuri stea de ordin n-1. Restul secvenței, $secv_{n-1}$ realizează corect difuzarea mesajului în cele n subgrafuri stea S_{n-1} conform ipotezei de inducție.

Se observă că lungimea secvenței necesare pentru difuzarea mesajului către cele n-1 subgrafuri stea de ordin n-1 ce nu conțin nodul sursă este n-1. Deoarece tehnica se aplică recursiv, lungimea totală a secvenței este

$L = n-1+n-2+\ldots+3+2+1 = \frac{n(n-1)}{2}$ și deci costul este de ordin $O(n^2)$.

În [2] s-a demonstrat că un algoritm optim de difuzare a unui mesaj într-un graf stea necesită cel mult $O(\log_2 N) = O(\log_2 n!) = O(n \log_2 n)$ pași(N=n! numărul nodurilor garfului). Metoda prezentată nu este deci optimă.

ABOUT THE STAR GRAPH TOPOLOGY IN DISTRIBUTED SYSTEMS

Abstract. In this paper we present the star graph topology used as an alternative to the n-cube. The star graph possess rich structure and simmetry properties and many desirable fault tolerance characteristics wich make this topology very attractive.

BIBLIOGRAFIE

1. **S. B. Akers, B., Krishnamurthy,** A group-theoretic model for symmetric interconnection networks, IEEE Trans.Computers, Vol. 38, 1989, p. 555-566

2. **S. B. Akers, D. Harel, B. Krishnamurthy,** The star graph: An attractive alternative to the n-cube, Proc. Int. Conf. Parallel Processing, 1987, p. 393-400

3. **B. Becker, H. U. Simon,** How robust is the n-cube?, Proc. Symp. Foundations of Comp. Sci., 1986, p. 283-291

4. **R. Dechter, L. Kleinrock,** Broadcast communications and distributed algorithms, IEEE Trans. Computers, Vol. 35, 1986, p. 210-219

5. **V. E. Mendia, D. Sarkar,** Optimal broadcasting on the star graph, IEEE Trans. Parallel Distrib. Syst., Vol. 3, 1992, p. 389-396

6. **F. Păunescu, D. P. Goleşteanu,** Sisteme cu prelucrare distribuită şi aplicaţiile lor, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1993

7. **J. P. Shen, C. T. Wu, T. S. Chen,** An optimal broadcasting algorithm without redundancy in star graphs, IEEE Trans. Parallel Distrib. Syst., Vol. 6, 1995, p. 653-657

Universitatea de Nord din Baia Mare
Catedra de Matematică şi Informatică
Str. Victoriei 76, 4800 Baia Mare
ROMANIA
E-mail: zelina@univer.ubm.ro

Primit la 1.08.1997