Lucrările Seminarului de
CREATIVITATE MATEMATICĂ
Vol. 8(1998-1999), 1-20

GENERALIZAREA UNEI PROPRIETĂŢI DERIVATE DIN ASEMĂNARE

Marin BANCOŞ

În [1] am propus cititorilor articolul " O proprietate derivată din asemănare".

În elaborarea acestuia am pornit de la problema 15544 din [5.1], problemă propusă de regretatul profesor Gh. D. Simionescu.

Aceasta avea următorul enunţ:

" *Se dau în acelaşi plan două triunghiuri echilaterale: ABC, $A'B'C'$, situate în poziţii oarecare unul faţă de celălalt.*

Să se arate că $\Delta A_0B_0C_0$ format cu mijloacele segmentelor $[AA']$, $[BB']$ şi $[CC']$ este de asemenea echilateral".

(Enunţ parţial)

Problema suportă următoarea generalizare:

Propoziţie.

Se dau în acelaşi plan două triunghiuri asemenea, notate în acelaşi sens: $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta A_2B_2C_2$, şi punctele $A_0 \in [A_1A_2]$, $B_0 \in [B_1B_2]$, $C_0 \in [C_1C_2]$, pentru care :

$$\frac{A_0A_1}{A_0A_2} = \frac{B_0B_1}{B_0B_2} = \frac{C_0C_1}{C_0C_2} \overset{not}{=} k$$

Atunci: $\Delta A_0B_0C_0 \sim A_1B_1C_1 \sim A_2B_2C_2$.

Demonstraţia propusă a fost una sintetică, relativ asemănătoare cu soluţia vectorială dată de autor pentru problema iniţială.

În excelenta lucrare [3] profesorul Gh.D.Simionescu reia problema iniţială şi propune spre demonstrare şi un caz mai general (corespunzător lui k=1). Suntem însă datori să subliniem faptul că ambele enunţuri, atât cel iniţial cât şi cel generalizat, date de autor, sunt incomplete. Proprietatea evidenţiată nu funcţionează decât în cazul în care cele două triunghiuri sunt notate în acelaşi sens. Cu alte cuvinte, dacă un triunghi se obţine din celălalt printr-o translaţie, o omotetie şi o rotaţie.

În anul 1987 la Olimpiada de Matematică- Faza Naţională, clasa a IX-a, profesorul Mircea Becheanu propune o problemă ce reprezintă tot un caz particular al propoziţiei noastre, datorită poziţionării particulare a triunghiurilor iniţiale (unul fiind plasat în interiorul celuilalt).

Propoziţia enunţată permite o nouă generalizare pentru cazul a două poligoane convexe asemenea.

Generalizare. *Se dau în acelaşi plan două poligoane convexe asemenea, notate în acelaşi sens:* $[A_1^1A_2^1...A_n^1] \sim [A_1^2A_2^2...A_n^2]$, *şi punctele* $A_1^0 \in [A_1^1A_1^2]$, $A_2^0 \in [A_2^1A_2^2]$,..., $A_n^0 \in [A_n^1A_n^2]$, *pentru care*

$$\frac{A_1^0A_1^1}{A_1^0A_1^2} = \frac{A_2^0A_2^1}{A_2^0A_2^2} = ... = \frac{A_n^0A_n^1}{A_n^0A_n^2} \overset{not}{=} k$$

Atunci: $[A_1^0A_2^0...A_n^0] \sim [A_1^1A_2^1...A_n^1] \sim [A_1^2A_2^2...A_n^2]$.

Demonstraţie. Din $\Delta A_1^1A_2^1A_3^1 \sim \Delta A_1^2A_2^2A_3^2$ şi aplicând propoziţia se obţine imediat că şi $\Delta A_1^0A_2^0A_3^0$ este asemenea cu acestea şi deci:

$$(1)\begin{cases} \dfrac{A_1^0A_2^0}{A_1^1A_2^1} = \dfrac{A_2^0A_3^0}{A_2^1A_3^1} \\ \widehat{A_1^0A_2^0A_3^0} = \widehat{A_1^1A_2^1A_3^1} \end{cases}$$

Considerând $\Delta A_1^1A_3^1A_4^1 \sim \Delta A_1^2A_3^2A_4^2$ se va obţine similar:

$$(2)\begin{cases}\dfrac{A_2^0A_3^0}{A_2^1A_3^1}=\dfrac{A_3^0A_4^0}{A_3^1A_4^0}\\ \widehat{A_2^0A_3^0A_4^0}=\widehat{A_2^1A_3^1A_4^1}\end{cases}$$

Procedeul se continuă până la $\Delta A_n^1A_1^1A_2^1 \sim \Delta A_n^2A_1^2A_2^2$

rezultând că:
$$(n)\begin{cases}\dfrac{A_n^0A_1^0}{A_n^1A_1^1}=\dfrac{A_1^0A_2^0}{A_1^1A_2^1}\\ \widehat{A_n^0A_1^0A_2^0}=\widehat{A_n^1A_1^1A_2^1}\end{cases}$$

Din $(1)+(2)+...+(n)$ se obține imediat concluzia.

Notații. Convenim ca în cazul unei asemănări:

$$[A_1^1A_2^1...A_n^1] \sim [A_1^2A_2^2...A_n^2]$$

să subînțelegem că notarea poligoanelor s-a făcut în același sens iar poligonul $[A_1^0A_2^0...A_n^0]$, construit ca în enunțul generalizării, să-l evidențiem astfel:

$$\left([A_1^1A_2^1...A_n^1] \sim [A_1^2A_2^2...A_n^2]\right) \overset{(k)}{\sim} [A_1^0A_2^0...A_n^0]$$

Enunțul propoziției inițiale se restrânge în:

$$(\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta A_2B_2C_2) \overset{(k)}{\sim} \Delta A_0B_0C_0$$

Dacă k=1 (cazul mijloacelor segmentelor considerate), nu-l vom mai trece pe 1 în paranteze deasupra semnului " ~ "

Observații. 1. Noțiunea de asemănare este utilizată efectiv, în manualele de geometrie, până la nivelul poligoanelor convexe.

Să observăm că la fel de bine putem aplica procedeul din demonstrația generalizării și pentru cazul liniilor poligonale asemenea.

Vom utiliza în aplicații următorul caz particular de linii poligonale asemenea când în plan se consideră segmentele

$$[A_1B_1], [A_2B_2], \text{ cu } M_1 \in [A_1B_1], M_2 \in [A_2B_2],$$

pentru care: $$\frac{M_1A_1}{M_1B_1} = \frac{M_2A_2}{M_2B_2} \Leftrightarrow \frac{M_1A_1}{M_2A_2} = \frac{M_1B_1}{M_2B_2}$$

În virtutea extinderii noțiunii de asemănare putem spune că:

$$A_1M_1B_1 \sim A_2M_2B_2$$

Bineînțeles că putem interpreta această asemănare de linii poligonale ca fiind cazul a două triunghiuri degenerate asemenea.

2. Se poate demonstra că proprietatea evidențiată se extinde și la cazul figurilor geometrice plane (oarecare) asemenea.
Acest caz nu face însă obiectul acestei prezentări.

3. Rezultatele evidențiate până în prezent sunt valoroase îndeosebi datorită aplicabilității lor. Cu ajutorul acestor rezultate vom rezolva o gamă largă de aplicații cu grad de dificultate ridicat.

Astfel, în cele ce urmează rezolvăm 20 de probleme în care se utilizează asemănarea pentru:

• triunghiuri echilaterale	problemele 1,2,3,4
• triunghiuri dreptunghice isoscele	problemele 5,6,7
• triunghiuri dreptunghice	problemele 8,9 (parțial)
• triunghi isoscel	problema 10
• triunghiuri oarecare	problemele 9,11, 12, 13
• pătrate	problemele 14,15,16
• poligoane regulate	problema 17
• linii poligonale (triunghiuri degenerate)	problemele 18,19,20

Pentru unitatea prezentării am reluat și problemele propuse în articolul amintit.

Problema 1.

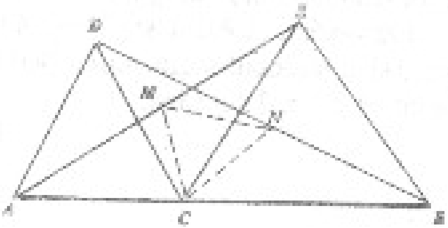
Fie C un punct situat în interiorul segmentului [AB]. De aceeași parte a lui AB se construiesc triunghiurile echilaterale ADC și CEB.
Dacă M și N sunt mijloacele segmentelor [AE] și [DB], arătați că triunghiul CMN este echilateral.

Olimpiada de Matematică, Faza locală 1991, Jud. Timiș, clasa a XI-a

Rezolvare.

$(\Delta ACD \sim \Delta ECB) \sim \Delta MCN$

În aceste condiţii rezultă imediat că este echilateral şi ΔMCN.



Observaţii.

- Nu este obligatoriu ca punctele A,C şi B să fie coliniare pentru a avea ΔCMN echilateral.
- Este suficient, în problema enunţată, ca M şi N să împartă segmentele [AE] şi [DB] în acelaşi raport.
- Pentru două triunghiuri echilaterale putem scrie asemănarea în trei moduri diferite. Se pot enunţa astfel încă două probleme de tipul celei rezolvate.

Problema 2.

Pe laturile [AB] şi [AC] ale unui triunghi se construiesc în exterior triunghiurile echilaterale ABN şi ACM.

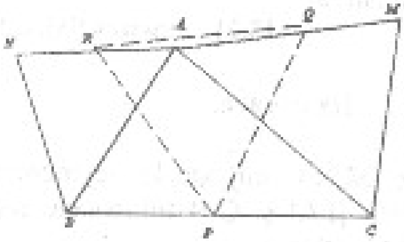
Dacă P,Q,R sunt mijloacele segmentelor [BC], [AM], [AN], să se demonstreze că ΔPQR este echilateral.

[2] Ediţia 1990, Problema 5, pagina 141

Rezolvare.

$(\Delta ABN \sim \Delta MCA) \sim \Delta QPR$

Obţinem deci că şi ΔQPR este echilateral.



Observaţii.

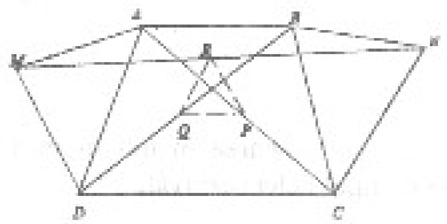
- Din $\Delta ABN \sim \Delta CAM$ se va obţine că mijloacele segmentelor [AB], [AC] şi [MN] sunt vârfurile unui triunghi echilateral.
- Din $\Delta ABN \sim \Delta AMC$ se va obţine practic problema anterioară pentru un caz mai general (al necoliniarităţii punctelor A,C şi B).

Problema 3.

Pe laturile neparalele [AD] şi [BC] ale trapezului [ABCD] se construiesc spre exterior (sau interior) triunghiurile echilaterale ADM şi BCN.

Cunoscând că $AB=l_1$ şi $CD=l_2$ să se demonstreze că mijloacele diagonalelor trapezului şi mijlocul segmentului [MN] sunt vârfurile unui triunghi echilateral a cărui latură se va determina.

Problemă propusă



Rezolvare.

$(\Delta ADM \sim \Delta CBN) \sim \Delta PQR$

Aşadar şi ΔPQR este triunghi echilateral.

Cunoaştem însă că:

$$PQ = \frac{CD-AB}{2} = \frac{l_2 - l_1}{2}$$

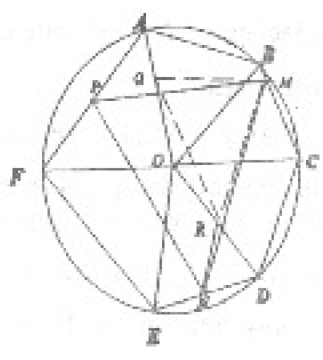
Prin urmare ΔPQR este un triunghi echilateral de latură: $\dfrac{l_2 - l_1}{2}$.

Problema 4.

Fie [ABCDEF] un hexagon înscris într-un cerc de rază r. Arătaţi că dacă AB=CD=EF=r, atunci mijloacele lui [BC] , [DE], [FA] sunt vârfurile unui triunghi echilateral.

[5.2] Concurs SUA, Problemă pregătitoare pentru OIM

Rezolvare.



Fie M,N,P mijloacele segmentelor [BC], [DE], [FA] şi Q,R mijloacele segmentelor [OA],[OD].

Avem:

$(\Delta OAB \sim \Delta DOC) \sim \Delta RQM \rightarrow \Delta RQM$ este echilateral

Să mai observăm că [PQ] e linie mijlocie în ΔAOF şi [RN] e linie mijlocie în ΔDOE.

- ΔRQM este echilateral $\Rightarrow [MQ]=[MR]$ (1)
- $PQ=\frac{1}{2}OF=\frac{r}{2}=\frac{1}{2}OE=RN \Rightarrow [PQ]=[RN]$ (2)
- $m(\widehat{PQM})=m(\widehat{PQO})+m(\widehat{OQR})+m(\widehat{RQM})$

$m(\widehat{PQO})=180^0-m(\widehat{PQA})=180^0-m(\widehat{FOA})=180^0-m(\widehat{AF})$

$m(\widehat{OQR})=\frac{1}{2}[180^0-m(\widehat{ABCD})]=\frac{1}{2}[180^0-(60^0+m(\widehat{BC})+60^0)]=$

$=30^0-\frac{1}{2}m(\widehat{BC})=m(\widehat{ORQ})$, deoarece ΔOQR este isoscel, el având

$OQ=OR=\frac{r}{2}$.

$m(\widehat{RQM})=60^0$.

Aşadar:

$$m(\widehat{PQM})=180^0-m(\widehat{AF})+30^0-\frac{1}{2}m(\widehat{BC})+60^0=270^0-m(\widehat{AF})-\frac{1}{2}m(\widehat{BC}) \quad (3')$$

- $m(\widehat{NRM})=m(\widehat{NRD})+m(\widehat{DRM})$

$m(\widehat{NRD})=m(\widehat{EOD})=m(\widehat{DE})=360^0-3\cdot 60^0-m(\widehat{AF})-m(\widehat{BC})=$

$=180^0-m(\widehat{AF})-m(\widehat{BC})$

$m(\widehat{DRM})=180^0-m(\widehat{ORM})=180^0-[m(\widehat{ORQ})+60^0]=$

$=180^0-[30^0-\frac{1}{2}m(\widehat{BC})+60^0]=90^0+\frac{1}{2}m(\widehat{BC})$

Deci:

$$m(\widehat{NRM})=180^0-m(\widehat{AF})-m(\widehat{BC})+90^0+\frac{1}{2}m(\widehat{BC})=270^0-m(\widehat{AF})-\frac{1}{2}m(\widehat{BC}) \quad (3'')$$

Din (3')+(3'') obţinem : $\widehat{PQM}=\widehat{NRM}$ (3)

Folosind L.U.L. din (1)+(2)+(3) avem $\Delta PQM=\Delta NRM$, şi deci MP=MN.

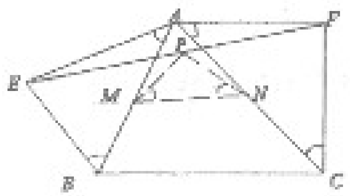
Similar arătăm că MP=NP, rezultând imediat că ΔMNP este echilateral.

Problema 5.

Fie triunghiul ABC. În exteriorul lui se construiesc triunghiurile ABE şi ACF, dreptunghice în E, respectiv F, şi isoscele.
Fie M,N,P respectiv mijloacele segmentelor [AB] , [AC] şi [EF].
Arătaţi că triunghiul MNP este dreptunghic isoscel.

[5.4] Problema C: 1646, autor Irina Goia, elevă Bucureşti

Rezolvare.



$(\Delta\, ABE \sim \Delta\, CAF) \sim \Delta\, NMP$

Aşadar şi triunghiul NMP este dreptunghic isoscel.

Problema 6.

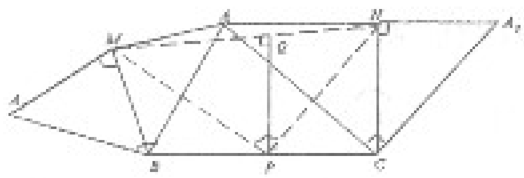
Pe laturile [AB] şi [AC] ale triunghiului ABC se construiesc în exterior triunghiurile isoscele AMB şi ANC, având $m(\widehat{AMB}) = m(\widehat{ANC}) = 90^0$.

Arătaţi că dacă P este mijlocul lui [BC] şi Q este mijlocul lui [MN] avem $PQ \perp MN$.

Rezolvare.

Fie A_1 şi A_2 simetricele lui A faţă de M, respectiv N.
Ţinând cont de asemănarea triunghiurilor dreptunghice isoscele formate avem:

$(\Delta\, A_1BA \sim \Delta\, ACA_2) \sim \Delta\, MPN$



Deci $\Delta\, MPN$ este dreptunghic (în P) isoscel. Cum Q este mijlocul ipotenuzei [MN] avem evident că : $PQ \perp MN$.

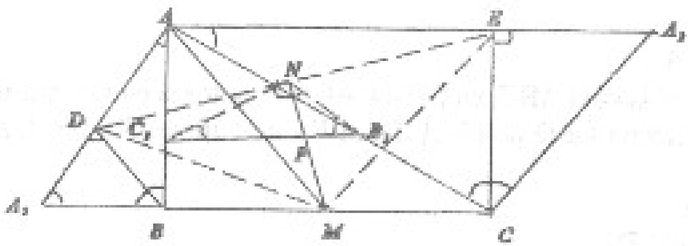
Problema 7.

În exteriorul triunghiului ABC, cu $m(\widehat{A}) \neq 90^0$, se consideră punctele D,E, astfel încât DAB şi EAC sunt triunghiuri isoscele şi dreptunghice în D, respectiv E.

Fie M,N mijloacele segmentelor [BC] şi [DE].
Să se arate că punctele A,M,N sunt coliniare dacă şi numai dacă avem DE//BC.

Concursul Interjudeţean " Spiru Haret-Gh. Vrânceanu" 1996, autor prof. dr. Dan Brânzei

Rezolvare.



Introducem următoarele notaţii:
B_1 , C_1- mijloacele laturilor [AC] şi [AB], iar P este mijlocul lui $[B_1C_1]$.
A_1,A_2 - simetricele lui A faţă de D şi respectiv E.
Avem: $(\Delta A_1BA \sim \Delta ACA_2) \sim \Delta DME$

Cum DME este deci triunghi dreptunghic isoscel avem imediat că $MN \perp DE$.

Similar:

$(\Delta BDA \sim \Delta AEC) \sim \Delta C_1NB_1$ va conduce imediat la $NP \perp B_1C_1$.

"⇒" Considerăm: DE // BC.

$$\left.\begin{array}{l} DE \,//\, BC \\ MN \perp DE \end{array}\right| \to MN \perp BC$$

Însă: $$\underset{(B_1C_1 \text{ linie mijlocie})}{B_1C_1 \,//\, BC} \to \left.\begin{array}{l} MN \perp B_1C_1 \\ NP \perp B_1C_1 \end{array}\right| \to M,P,N-coliniare$$

$$\text{însă } A,P,N-coliniare \Rightarrow A,M,N-coliniare$$

"⇐" Considerăm : A,M,N coliniare

$$\left.\begin{array}{l} A,M,N-coliniare \\ A,P,M-coliniare \end{array}\right| \Rightarrow A,N,P,M-coliniare(\text{determină dreapta } d)$$

$$\left.\begin{array}{r} NP \perp B_1C_1 \to NP \perp BC \Rightarrow d \perp BC \\ MN \perp DE \Rightarrow d \perp DE \end{array}\right| \to BC \parallel DE$$

Problema 8.

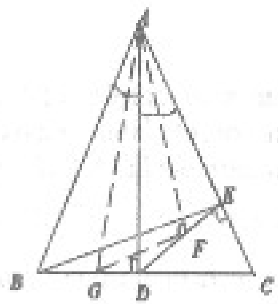
Fie triunghiul isoscel ABC, cu [AB]=[AC]. Se notează cu D piciorul înălțimii din A și cu E proiecția lui D pe [AC]. Dacă F este mijlocul lui [DE], să se arate că: AF ⊥ BE

Rezolvare.

Fie G mijlocul lui [BD].

Avem:

$(\Delta AED \sim \Delta ADB) \sim \Delta AFG$



Așadar:

$m(\widehat{AFG}) = 90^0 \Rightarrow AF \perp FG$

Însă [GF] este linie mijlocie în ΔBDE și deci $FG \parallel BE$. Prin urmare: $AF \perp BE$

Observație.

Problema E:9409* propusă în [5,3] cere să se demonstreze că avem:

$$m(\widehat{BEC}) = m(\widehat{AFD})$$

Concluzia este imediată dacă se observă că: $\widehat{GFD} \equiv \widehat{BED}$ (din FG//BE).

Avem:

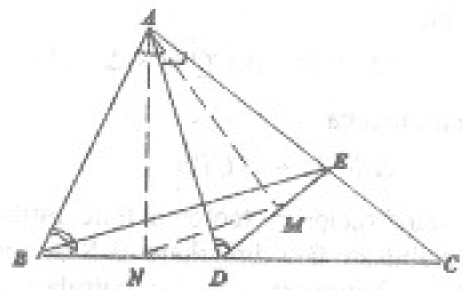
$$m(\widehat{BEC}) = m(\widehat{BED}) + m(\widehat{DEC}) = m(\widehat{BED}) + 90^0 = m(\widehat{GFD}) + m(\widehat{AFG}) = m(\widehat{AFD})$$

Problema 9.

Fie triunghiul oarecare ABC. Bisectoarea unghiului din A intersectează [BC] în D. Considerăm $E \in [AC]$ astfel încât avem $m(\widehat{ADE}) = m(\widehat{ABC})$. Dacă M este mijlocul lui [DE], arătați că $AM \perp BE$ dacă și numai dacă AB=AC.

Problemă propusă.

Rezolvare.



Fie N mijlocul lui [BD]. Evident:

$(\Delta\, ABD \sim \Delta\, ADE) \sim \Delta\, ANM$

"$\Rightarrow$"

Considerăm $AM \perp BE$.

Avem:

$AM \perp BE \Rightarrow m(\widehat{AMN}) = 90^0$,

deoarece [MN] este linie mijlocie în $\Delta\, BDE$ şi deci MN//BE.

Ţinând cont de asemănarea evidenţiată: $m(\widehat{AMN}) = m(\widehat{ADB})$.

Deci: $m(\widehat{ADB}) = 90^0$ .Prin urmare [AD] este şi înălţime în $\Delta\, ABC$.

Rezultă imediat că: AB=AC.

"$\Leftarrow$"

Considerând AB=AC avem o situaţie analizată deja în problema anterioară.

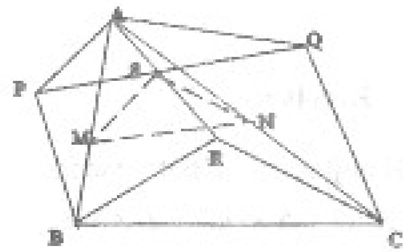
Problema 10.

Pe laturile unui triunghi ABC se construiesc trei triunghiuri isoscele asemenea: APB, cu [AP]=[PB], AQC, cu [AQ]=[QC], şi BRC, cu [BR]=[RC], primele două găsindu-se în exteriorul triunghiului ABC şi al treilea fiind aşezat de aceeaşi parte a dreptei BC cu triunghiul ABC.

Să se arate că [APRQ] este paralelogram.

Problemă propusă de Belgia pentru O.I.M. 1983

Rezolvare.



Notăm cu M,N şi S mijloacele segmentelor [AB], [AC] şi [PQ].
Avem:

$$(\Delta\ APB \sim \Delta\ CQA) \sim \Delta\ NSM$$

De asemenea:

$$\Delta\ NSM \sim \Delta\ CRB$$

Folosind reciproca teoremei liniei mijlocii se stabileşte fără dificultate că S este mijloc şi pentru [AR]. Prin urmare [AR] şi [PQ] se înjumătăţesc şi deci patrulaterul [APRQ] este paralelogram.

Observaţie.

● Dacă triunghiurile construite sunt (în particular) echilaterale, se obţine una din problemele propuse la **Olimpiada de Matematică, Faza Naţională, Ploieşti, 1990**.

● Această problemă admite o frumoasă generalizare.

"Pe laturile patrulaterului convex [ABCD] se construiesc triunghiurile isoscele asemenea: AMB şi CPD cu vârfurile în exterior, şi respectiv BNC şi DQA cu vârfurile în interiorul patrulaterului.

Arătaţi că [MNPQ] este paralelogram, eventual degenerat."

Dacă triunghiurile sunt echilaterale obţinem o **Problemă propusă de Tunisia pentru O.I.M. , 1982**

Problema 11.

Pe laturile triunghiului ABC se construiesc cu vârfurile în exterior triunghiurile ADB, BEC şi CFA, astfel încât

$$\frac{AD}{BD} = \frac{BE}{EC} = \frac{CF}{FA} = k \text{ şi } \quad m(\widehat{ADB}) = m(\widehat{BEC}) = m(\widehat{CFA}) = \alpha$$

Să se demonstreze că:

a) mijloacele M, N, P, Q ale segmentelor [AC], [DC], [BC] şi [EF] sunt vârfurile unui paralelogram

b) în acest paralelogram două unghiuri au măsura α şi raportul lungimilor a două laturi este k.

[2] Ediţia 1981, Problema 20.. , Probleme recapitulative

Rezolvare.

a) În baza enunțului avem:

$\Delta ABD \sim \Delta BCE \sim \Delta CAF$

Avem:

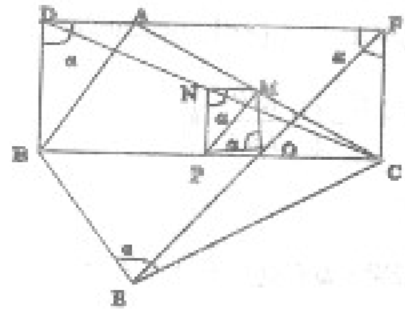
$(\Delta BCE \sim \Delta CAF) \sim \Delta PMQ$

De asemenea din considerente de linii mijlocii obținem imediat că:

$\Delta ABD \sim \Delta MNP$

Avem deci:

$\Delta PMQ \sim \Delta MPN$ .Cum raportul de asemănare este:



$$\frac{PM}{MP} = \frac{MQ}{PN} = \frac{PQ}{MN} = 1$$

va rezulta că:

$$\Delta PMQ = \Delta MPN \Rightarrow [MNPQ] \text{ este paralelogram}$$

Partea b) este o consecință imediată a punctului anterior.

Observație. În manual problema a fost cotată ca având un grad de dificultate foarte ridicat.

Problema 12.

Pe laturile [AB] și [AC] ale triunghiului ABC se construiesc în exterior triunghiurile asemenea $APB \sim CQA$, având:

$m(\widehat{APB}) = m(\widehat{CQA}) = \alpha$, cu α fixat.

Să se determine locul geometric al punctului $M \in [PQ]$ pentru care

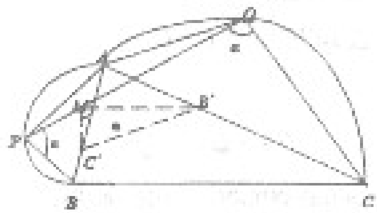
$$\frac{MP}{MQ} = k = constant \ ,$$

atunci când P și Q se mișcă în plan.

Problemă propusă.

Rezolvare.

Considerăm punctele $B' \in [AC]$, $C' \in [AB]$, pentru care



$$\frac{B'A}{B'C} = \frac{C'B}{C'A} = \frac{MP}{MQ} = k$$

Avem:

$$(\Delta ABP \sim \Delta CAQ) \overset{(K)}{\sim} \Delta B'C'M$$

Cum segmentul $[B'C']$ este fix şi $m(\widehat{C'MB'}) = \alpha = fixat$, obţinem imediat că locul geometric este arcul capabil de unghiul $\widehat{C'MB'}$.

Evident că punctele P şi Q se mişcă în plan, simultan, pe arce de cerc, pentru a putea avea

$$m(\widehat{APB}) = m(\widehat{CQA}) = \alpha$$

Problema 13.

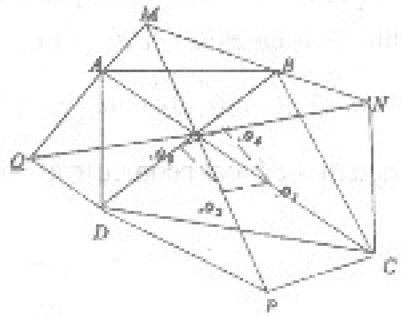
Pe laturile patrulaterului convex [ABCD] se construiesc în exterior triunghiurile asemenea: AMB, BNC, CPD, DQA.

Demonstraţi că mijloacele segmentelor [AC],[MP],[BD] şi [NQ] sunt vârfurile unui paralelogram.

Problemă propusă.

Rezolvare.

Notăm cu o_1, o_2, o_3, o_4 mijloacele segmentelor [AC], [MP],[BD] şi [NQ].



Avem:

$$(\Delta AMB \sim \Delta CPD) \sim \Delta o_1 o_2 o_3$$

Deasemenea:

$$(\Delta BNC \sim \Delta DQA) \sim \Delta o_3 o_4 o_1$$

Prin urmare: $\Delta o_1 o_2 o_3 \sim \Delta o_3 o_4 o_1$

Cum raportul de asemănare este: $\frac{o_1 o_2}{o_3 o_4} = \frac{o_2 o_3}{o_4 o_1} = \frac{o_1 o_3}{o_3 o_1} = 1,$

va rezulta că:

$\Delta\, o_1 o_2 o_3 = \Delta\, o_3 o_4 o_1 \rightarrow [o_1 o_2 o_3 o_4]$ este paralelogram.

Problema 14.

Se consideră pătratele [MABC] şi [MA'B'C'], notate în acelaşi sens. Dacă P şi Q sunt mijloacele segmentelor [A'C] şi respectiv [AC'], arătaţi că:

$$PQ \perp BB'$$

Problemă propusă.

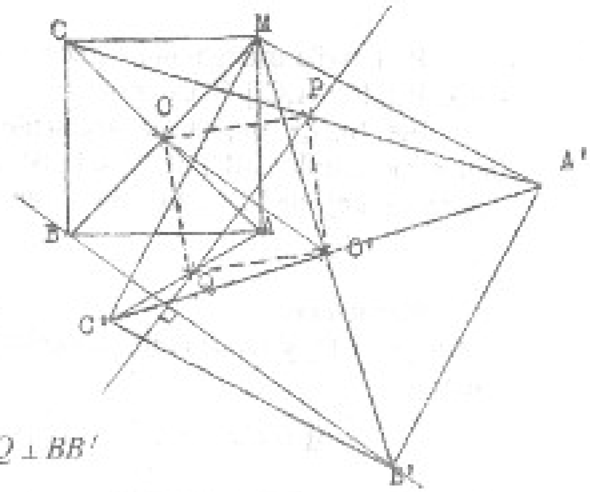
Rezolvare.

Dacă O, O' sunt centrele pătratelor $[MABC]$, $[MA'B'C']$ atunci:

$([CMAB] \sim [A'B'C'M]) \sim [PO'QO]$

Aşadar: $PQ \perp OO'$.

Dar $[OO']$ este linie mijlocie în triunghiul MBB'. Prin urmare:



$$OO' // BB' \Rightarrow PQ \perp BB'$$

Problema 15.

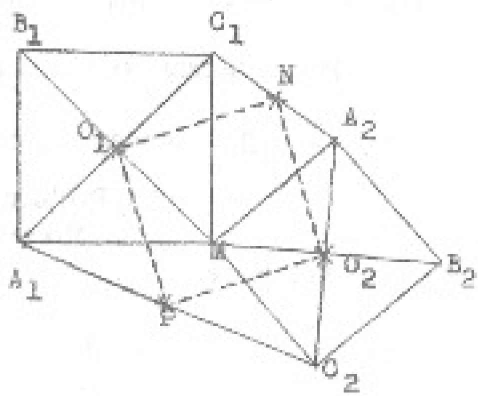
Două pătrate $[MA_1B_1C_1]$ şi $[MA_2B_2C_2]$, având vârfurile notate în acelaşi sens, au vârful comun M.

Arătaţi că centrele lor şi mijloacele segmentelor $[A_1C_2]$ şi $[A_2C_1]$ sunt vârfurile unui pătrat.

Olimpiadă URSS

Rezolvare.

Fie O_1 şi O_2 centrele pătratelor $[MA_1B_1C_1]$ şi $[MA_2B_2C_2]$, iar P,N mijloacele segmentelor $[A_1C_2],[A_2C_1]$.



Avem:

$([MA_1B_1C_1] \sim [B_2C_2MA_2]) \sim [O_2PO_1N]$

Deci patrulaterul $[O_2PO_1N]$ este pătrat. Atunci şi O_1PO_1N va fi pătrat.

Observaţie.
Se pot formula încă trei probleme asemănătoare, rezultate din scrierea asemănării pătratelor în încă trei moduri.

Problema 16.

Pe laturile triunghiului oarecare ABC se construiesc pătratele $[ABB_1A_2]$, $[BCC_1B_2]$, $[CAA_1C_2]$, în exterior.
Fie M,N,P mijloacele segmentelor $[A_1A_2]$, $[B_1B_2]$, $[C_1C_2]$ şi A',B',C' mijloacele laturilor [BC], [CA] şi [AB] ale triunghiului ABC.
Arătaţi că dreptele MA', NB', PC' sunt concurente.

Problemă propusă

Rezolvare.
Notăm cu O_1,O_2 şi O_3 centrele pătratelor construite pe laturile [AB],[BC] şi [CA].
Cum:

$$([ABB_1A_2] \sim [C_2CAA_1]) \sim [O_3A'O_1M] \Rightarrow [O_3A'O_1M] \text{ este pătrat}$$

Deci: MA' este mediatoarea lui $[O_1O_3]$

Procedând similar şi pentru NB',PC', obţinem că dreptele date sunt mediatoarele laturilor $\Delta O_1O_2O_3$, ele fiind deci concurente în centrul cercului circumscris acestuia.

Problema 17.
Fie $n \geq 3$, $k>0$ iar $[A_1A_2...A_n]$, $[B_1B_2...B_n]$ două poligoane regulate în plan.

Pentru fiecare $i \in \{1,2,...,n\}$ alegem punctele $C_i \in [A_iB_i]$, astfel încât $A_iC_i = k \cdot C_iB_i$. Arătaţi că şi poligonul $[C_1C_2...C_n]$ este regulat

[5.5] Problema O: 785, autor Doru Isac, Sibiu
(Pregătitoare pentru O.I.M. şi O.B.M)

Rezolvare.

Avem: $([A_1A_2...A_n] \sim [B_1B_2...B_n]) \overset{(k)}{\sim} [C_1C_2...C_n]$

Aşadar poligonul $[C_1C_2...C_n]$ este şi el regulat.

Problema 18.

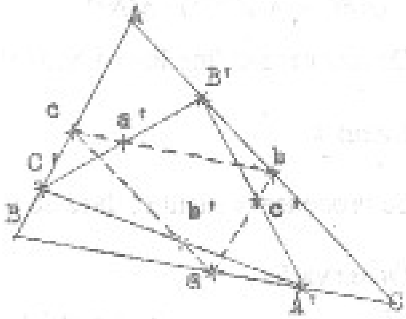
Fie A', B', C' punctele ce împart laturile triunghiului ABC în acelaşi raport k şi în acelaşi sens.

Fie a,b,c mijloacele laturilor triunghiului ABC şi a',b',c' mijloacele laturilor triunghiului $A'B'C'$.

Să se arate că punctele b, c, a'; c, a, b'; a, b, c'; sunt coliniare.

[4] Problema 448, enunţ parţial

Rezolvare.



Deoarece, conform enunţului:

$$\frac{C'A}{C'B} = \frac{B'C}{B'A} = k,$$

putem scrie că: $(AB'C \sim BC'A) \sim ca'b$

De aici rezultă că b, c, a' sunt puncte coliniare şi, mai mult, că:

$$\frac{a'b}{a'c} = k.$$

Similar se demonstrează şi celelalte două cazuri.

Problema 19.

Pe dreptele d_1 şi d_2 din plan, se consideră punctele A,B,C, cu $B \in [AC]$, şi A', B', C', cu $B' \in [A'C']$, astfel încât:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC}$$

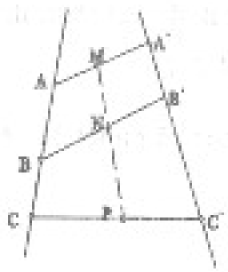
Să se arate că mijloacele segmentelor $[AA']$, $[BB']$ şi $[CC']$ sunt coliniare.

Olimpiada de Matematică, faza jud. 1996, Jud. Neamţ (enunţ parţial)

Rezolvare.

Cazul 1

Fie M, N, P mijloacele segmentelor $[AA'],[BB'],[CC']$.



Cum:

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}$$

putem afirma că:

$(ABC \sim A'B'C') \sim MNP$

De aici rezultă imediat că M,N,P sunt coliniare

Cazul 2

Se procedează identic, dacă se inversează A şi C.

Observaţie.

- În eventualitatea că $[AC] \cap [A'C'] \neq \phi$, nu se modifică concluzia.
- Problema poate fi generalizată dacă se consideră că M,N,P nu sunt mijloace, ci împart segmentele [AA'], [BB'], [CC'] în acelaşi raport.

Problema 20.

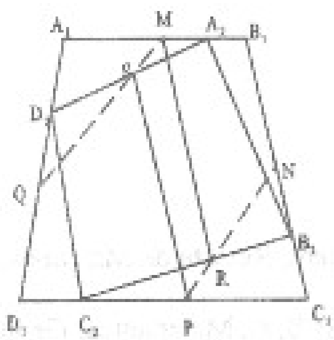
Pe laturile $[A_1B_1],[B_1C_1],[C_1D_1],[D_1A_1]$, ale patrulaterului convex $[A_1B_1C_1D_1]$, se consideră A_2,B_2,C_2,D_2 pentru care:

$$\frac{A_1A_2}{A_2B_1}=\frac{B_1B_2}{B_2C_1}=\frac{C_1C_2}{C_2D_1}=\frac{D_1D_2}{D_2A_1}=k, \text{ unde : } k>0\,,\, k\neq 1.$$

Arătaţi că mijloacele segmentelor $[A_1B_1],[B_2C_2],[C_1D_1],[D_2A_2]$ sunt vârfurile unui paralelogram.

[4] Problema 472, enunţ modificat

Rezolvare. Fie M,N,P,Q mijloacele laturilor $[A_1B_1],[B_1C_1]$, $[C_1D_1],[D_1A_1]$ şi R, S mijloacele segmentelor $[B_2C_2],[D_2A_2]$.



Trebuie să demonstrăm deci că [MRPS] este paralelogram.

Avem:

$$(A_1A_2B_1 \sim D_1D_2A_1) \sim QSM$$

Prin urmare punctele Q,S,M sunt coliniare şi

$$\frac{QS}{SM} = k \qquad (1)$$

În mod similar avem: $(B_1B_2C_1 \sim C_1C_2D_1) \sim NRP$

De aici obţinem că punctele N, R, P sunt coliniare şi

$$\frac{NR}{RP} = k \qquad (2)$$

Se arată uşor, din considerente de linii mijlocii, că: $MQ = NP$ şi $MQ \parallel NP$.
Folosind acest lucru şi observaţiile (1) şi (2) obţinem imediat că:

$$MS = RP \text{ şi } MS \parallel RP.$$

Aşadar [MRPS] este paralelogram.

Bibliografie

[1] BANCOŞ, M., O proprietate derivată din asemănare, Revista de Matematică din Timişoara, nr. 3, 1997

[2]. COŢA, A., RADO, M., RĂDUŢIU, M., VORNICESCU, F., Matematică, Geometrie şi Trigonometrie. Manual pentru clasa a IX-a, Editura Didactică şi Pedagogică

[3] SIMIONESCU, GH. D., Noţiuni de algebră vectorială şi aplicaţii în geometrie, Editura Tehnică, 1982

[4] ŢIŢEICA, G., Probleme de geometrie, Editura Tehnică, 1981

[5] Gazeta Matematică

[5.1] nr. 12, 1975

[5.2] nr. 3, 1978

[5.3] nr. 4, 1988

[5.4] nr. 3, 1995

[5.5] nr. 5, 1995

GENERALIZATION OF A PROPERTY DERIVED FROM SIMILARITY

Abstract. In this article we give a generalization with several applications of a geometric property derived from similarity.

Primit: 30.05.1998

Serviciul de Telecomunicaţii Speciale
Baia Mare
ROMANIA