Lucrările Seminarului de
CREATIVITATE MATEMATICĂ
Vol. 8(1998-1999), 21- 24

ASUPRA CALCULULUI UNOR LIMITE

Dan BĂRBOSU

Se va prezenta un rezultat simplu şi în acelaşi timp destul de general, care permite calculul limitelor de forma

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x^n)-g^n(x)}{x^{n+k}} \tag{1}$$

unde $f,g:A\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sunt funcţii date, $A\subset\mathbb{R}$ este nevidă şi $0\in A$ iar $k,n\in\mathbb{N}^*$ sunt fixate.

Lemă. Fie $A\subset\mathbb{R}$, $A\neq\emptyset$, $0\in A$, $f,g:A\to A$ iar $k,n\in\mathbb{N}^*$. Dacă sunt îndeplinite condiţiile

(i) $(\exists)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{x}=L_1\in\mathbb{R}$

(ii) $(\exists)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x^n)-x^n}{x^{n+k}}=L_2\in\mathbb{R}$;

(iii) $(\exists)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-g(x)}{x^{k+1}}=L_3\in\mathbb{R}$,

atunci limita (1) există şi valoarea acesteia L, este dată de

$$L=L_2+L_3(1+L_1+L_1^2+\ldots+L_1^{n-1}). \tag{2}$$

Demonstraţie. Se observă că

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{f(x^n)-g^n(x)}{x^{n+k}}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x^n)-x^n+x^n-g^n(x)}{x^{n+k}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{f(x^n)-x^n}{x^{n+k}}+\frac{x-g(x)}{x^{k+1}}\cdot\frac{x^{n-1}+x^{n-2}\cdot g(x)+\ldots+g^{n-1}(x)}{x^{n-1}}\right]=$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{f(x^n) - x^n}{x^{n+k}} + \lim_{x \to 0} \frac{x - g(x)}{x^{k+1}} \cdot \left[1 + \frac{g(n)}{x} + \ldots + \left(\frac{g(x)}{x} \right)^{n-1} \right] =$$

$$= L_2 + L_3 (1 + L_1 + L_1^2 + \ldots + L_1^{n-1}),$$

deci afirmaţia enunţului este demonstrată.

Observaţie. Lema prezentată generalizează rezultatul nostru anterior din [1]. În continuare se vor prezenta câteva aplicaţii ale acestei leme.

Aplicaţia 1. [4]. Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Să se calculeze

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{x^n - \sin^n x}{x^{n+2}}$$

Soluţie. Fie $A = \mathbb{R}$, $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$, $g(x) = \sin x$.

Atunci:

$$L_1 = \lim_{x \to 0} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$L_2 = \lim_{x \to 0} \frac{f(x^n) - x^n}{x^{n+2}} = \lim_{x \to 0} \frac{x^n - x^n}{x^{n+2}} = 0$$

$$L_3 = \lim_{x \to 0} \frac{x - g(x)}{x^{k+1}} = \lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \frac{1}{3} \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{6}$$

Ipotezele lemei fiind verificate, se obţine:

$$L = L_2 + L_3 (1 + L_1 + L_1^2 + \ldots + L_1^{n-1}) = \frac{1}{6} (1 + 1 + \ldots + 1) = \frac{n}{6}$$

Aplicaţia 2. [3]. Fie $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$. Să se calculeze

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x^n - \sin^n x}{x^{n+2}}$$

Soluţie. Fie $A = \mathbb{R}$, $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = g(x) = \sin x$, $k = 2$.

Atunci:

$$L_1 = \lim_{x \to 0} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$L_2 = \lim_{x \to 0} \frac{f(x^n) - x^n}{x^{n+2}} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x^n - x^n}{x^{3n}} x^{2(n-1)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x^n - x^n}{(x^n)^3} \cdot x^{2(n-1)} = -\frac{1}{6} \lim_{x \to 0} x^{2(n-1)} = 0$$

căci $n \geq 2$.

$$L_3 = \lim_{x \to 0} \frac{x - g(x)}{x^{k+1}} = \lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}.$$

Aplicând rezultatul lemei, se obține:

$$L = L_2 + L_3 (1 + L_1 + L_1^2 + \ldots + L_1^{n-1}) = \frac{n}{6}.$$

Aplicația 3. [2]. Fie $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$. Să se calculeze

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{tg\, x^n - \ln^n (x+1)}{x^{n+1}}$$

Soluție. Fie

$$A = \left\{ x \in (-1, +\infty) \mid x \neq l\pi + \frac{\pi}{2},\ l \in \mathbb{Z} \right\},\ f, g : A \to \mathbb{R},\ f(x) = tg\, x,$$

$g(x) = \ln(x+1)$, $k = 1$. Atunci

$$L_1 = \lim_{x \to 0} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$L_2 = \lim_{x \to 0} \frac{f(x^n) - x^n}{x^{n+2}} = \lim_{x \to 0} \frac{tg\, x^n - x^n}{x^{n+1}} = \lim_{x \to 0} \frac{tg\, x^n - x^n}{x^{2n}} x^{n-1}.$$

Dar:

$$\lim_{x \to 0} \frac{tg\, x^n - x^n}{x^{2n}} = \lim_{x \to 0} \frac{tg\, x^n - x^n}{(x^n)^2} = \lim_{y \to 0} \frac{tg\, y - y}{y^2} = \lim_{y \to 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 y} - 1}{2y} = \frac{1}{2} \lim_{y \to 0} \frac{\sin^2 y}{y} = 0$$

Cum $n \geq 2$, rezultă că $\lim_{x \to 0} x^{n-1} = 0$ și deci $L_2 = 0$.

$$L_3 = \lim_{x \to 0} \frac{x - g(x)}{x^{k+1}} = \lim_{x \to 0} \frac{x - \ln(x+1)}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \frac{1}{x+1}}{2x} = \frac{1}{2}.$$

Ipotezele lemei fiind verificate, rezultă că:

$$L = L_2 + L_3 (1 + L_1 + L_1^2 + \ldots + L_1^{n-1}) = \frac{n}{2}$$

Particularizând convenabil funcţiile f şi g se pot obţine şi alte aplicaţii interesante.

Bibliografie

1. **Bărbosu, D., Zelina, I.**, Bizonyos határértékek kiszámitásának egységes módszeréről, Matlap 7 1999, 271-272
2. **Bătineţu, D.M., ş.a.**, Exerciţii şi probleme de analiză matematică pentru clasele a XI-a şi a XII-a, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981
3. **Panaitopol, M.E.**, problema 17764, G.M. 5/1979
4. * * * Problemă dată la concursul de admitere în învăţământul superior 1986

ON THE COMPUTATION OF SOME LIMITS

Abstract. A general result for computing limits of the form (1) is established. The main result is contained in the lemma. Next, three applications to this lemma are presented.

Primit: 01.09.1999

Universitatea de Nord Baia Mare
Facultatea de Ştiinţe
Catedra de Matematică şi Informatică
Victoriei 76, 4800 Baia Mare
ROMANIA
E-mail:dbarbosu@univer.ubm.ro