Lucrările Seminarului de
CREATIVITATE MATEMATICĂ
Vol. 8(1998-1999), 25 - 28

ASUPRA CALCULULUI UNOR LIMITE ITERATE

Dan BĂRBOSU

Scopul acestei note este de a prezenta o metodă generală pentru calculul limitelor de forma

$$L_n = \lim_{x \to 0} \frac{g[f_n(x)] - g(x)}{x^k} \tag{1}$$

unde $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sunt funcţii date, n şi k sunt numere naturale nenule date iar f_n este iterata de ordinul n a funcţiei f, adică $f_n = f \circ f \circ \ldots \circ f$.

Enunţăm rezultatul principal al notei.

Propoziţia 1. Fie $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcţii date iar $k, n \in \mathbb{N}^*$ date. Dacă sunt îndeplinite condiţiile: (i) $f(0) = 0$; (ii) f şi g sunt continue în punctul $x=0$; (iii) există $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = l \in \mathbb{R}$; (iv) există $\lim\limits_{x \to 0} \frac{g[f(x)] - g(x)}{x^k} = L \in \mathbb{R}$, atunci limita (1) există şi are loc egalitatea:

$$L_n = L(1 + l^k + \ldots + l^{(n-1)k}). \tag{2}$$

Demonstraţie. Existenţa limitei (1) şi egalitatea (2) vor fi demonstrate prin inducţie după n. Pentru $n = 1$, egalitatea (2) subzistă în baza ipotezei (iv). Dacă $n = 2$, se obţine: $L_2 = \lim\limits_{x \to 0} \frac{g[f(x)] - g(x)}{x^k} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{g[f(f(x))] - g(x)}{x^k} =$

$$= \lim_{x \to 0} \left\{ \frac{g[f(f(x))] - g[f(x)]}{[f(x)]^k} \cdot \left(\frac{f(x)}{x} \right)^k + \frac{g[f(x)] - g(x)}{x^k} \right\}$$

În baza ipotezelor (i), (ii) şi (iv), rezultă că:

$$\lim_{x\to 0}\frac{g[f(f(x))]-g[f(x)]}{[f(x)]^k}=\lim_{x\to 0}\frac{g[f(y)]-g(y)}{y^k}=L$$

În baza ipotezei (iii), se obține:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)}{x}\right)^k=l^k.$$

Rezumând cele de mai sus, rezultă că L_2 *există și că egalitatea (2) are loc pentru* $n=2$. *Admitem că* L_p există și că egalitatea (2) are loc pentru $n=p$ (unde $p\in\mathbb{N}^*$, $p>2$). Atunci:

$$L_{p+1}=\lim_{x\to 0}\frac{g[f_{p+1}(x)]-g(x)}{x^k}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{g[f_{p+1}(x)]-g[f_p(x)]}{x^k}+\frac{g[f_p(x)]-g(x)}{x^k}\right\}$$

Dar:

$$\lim_{x\to 0}\frac{g[f_{p+1}(x)]-g[f_p(x)]}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{g[f_{p+1}(x)]-g[f_p(x)]}{[f_p(x)]^k}\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{f_p(x)}{f_{p-1}(x)}\right)^k\cdot\left(\frac{f_{p-1}(x)}{f_{p-2}(x)}\right)^k\cdots\left(\frac{f(x)}{x^k}\right)=L\cdot l^{pk}$$

Ultima egalitate se justifică ca și în cazul $n=2$.

Cum $\lim\limits_{x\to 0}\frac{g[f_p(x)]-g(x)}{x^k}=L_p$, rezultă că:

$$L_{p+1}=L\cdot l^{kp}+L_p=L(1+l^k+\ldots+l^{pk}).$$

În baza principiului inducției complete, rezultă că L_n există și egalitatea (2) are loc pentru orice număr natural $n\in\mathbb{N}^*$. Prezentăm în continuare două aplicații ale Propoziției 1.

Aplicația 1. Fie $n\in\mathbb{N}^*$. Calculați:

$$L_n = \lim_{x\to 0} \frac{\cos[\sin_n x] - \cos x}{x^4}$$

unde $\sin_n = \sin \circ \sin \circ \dots \circ \sin$.

Soluție. Fie $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$, $g(x) = x$ și $k = 4$. Evident $f(0) = 0$, și f și g sunt continue în $x = 0$ și există $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \in \mathbb{R}$. Deci ipotezele (i), (ii) și (iii) ale Propoziției 1 sunt verificate. Se verifică în continuare satisfacerea ipotezei (iv).

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{g[f(x)] - g(x)}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(\sin x) - \cos x}{x^4} =$$

$$= 2 \lim_{x\to 0} \frac{\sin \frac{x - \sin x}{2}}{\frac{x - \sin x}{2}} \cdot \frac{x - \sin x}{2} \cdot \frac{\sin \frac{x + \sin x}{2}}{\frac{x + \sin x}{2}} \cdot \frac{x + \sin x}{2} \cdot \frac{1}{x^4} =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^4} = \frac{1}{8} \lim_{x\to 0} \frac{2x - \sin 2x}{x^3} =$$

$$= \frac{1}{12} \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2} = \frac{1}{6} \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{2x} = \frac{1}{6}$$

Toate ipotezele Propoziției 1 fiind îndeplinite, conchidem că L_n există și $L_n = \frac{n}{6}$.

Observație. Cazul $n = 1$ face obiectul problemei 6.83(t) din [1].

Aplicația 2. Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Să se calculeze:

$$L_n = \lim_{x\to 0} \frac{\sin_{n+1}(x) - \sin x}{x^3}$$

unde $\sin_{n+1} = \sin \circ \sin \circ \dots \circ \sin$.

Soluţie. Fie $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = g(x) = \sin x$. E clar că limita ce se cere calculată este de forma (1). De asemenea $f(0) = \sin 0 = 0$, f şi g sunt continue în $x = 0$ şi există $l = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \in \mathbb{R}$. Deci ipotezele (i), (ii) şi (iii) ale Propoziţiei 1 sunt verificate. În continuare, se cercetează existenţa limitei $L = \lim\limits_{x \to 0} \frac{g[f(x)] - g(x)}{x^k}$. Avem:

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{\sin(\sin x) - \sin x}{x^3} = 2 \lim_{x \to 0} \frac{\sin \frac{\sin x - x}{2}}{\frac{\sin x - x}{2}} \cdot \frac{\sin x - x}{2x^3} \cdot \cos \frac{\sin x + x}{2} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \frac{1}{3} \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{6} \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = -\frac{1}{6}.$$

Toate ipotezele Propoziţiei 1 fiind verificate, rezultă că L_n există şi $L_n = -\frac{n}{6}$.

Particularizând convenabil funcţiile f şi g, cititorul poate obţine alte aplicaţii interesante.

Bibliografie

[1] Duca, D., Duca, E., Culegere de probleme de analiză matematică I, Editura GIL Zalău, 1996

ON THE COMPUTATION OF SOME ITERATED LIMITS

Abstract. The paper is devoted to the computation of the limits having the form (1). The main result is contained in the Proposition 1. Next, two applications of this result are presented.

Primit: 01.09.1999

Universitatea de Nord Baia Mare
Facultatea de Ştiinţe
Catedra de Matematică şi Informatică
Victoriei 76, 4800 Baia Mare
ROMANIA
E-mail:dbarbosu@univer.ubm.ro