Lucrările Seminarului de
CREATIVITATE MATEMATICĂ
Vol. 8(1998-1999), 29 - 32

O METODĂ PROBABILISTICĂ DE CALCUL A UNEI SUME COMBINATORIALE

Dan BĂRBOSU

Scopul prezentei note este de a indica o metodă probabilistică pentru calculul sumei

$$(1) \qquad S_n = \binom{2n}{n} + 2\binom{2n-1}{n} + 2^2\binom{2n-2}{n} + \dots + 2^n\binom{n}{n}$$

unde $\binom{n}{k}$ desemnează numărul combinărilor de n elemente luate câte k.

Este cunoscut (vezi de exemplu [2], pag.174) că $S_n = 2^{2n}$. Vom readuce în atenţie o problemă clasică de calculul probabilităţilor care permite calculul sumei (1) prin metode probabilistice. Este vorba de problema Banach, al cărei enunţ este următorul:

" *Un fumător are două cutii de chibrituri. De câte ori are nevoie scoate la întâmplare una sau alta dintre cutii. Să se găsească probabilitatea ca în momentul în care constată că una dintre cutii este goală, cealaltă să mai conţină k beţe, ştiind că iniţial fiecare cutie a conţinut k beţe.*"

Se va prezenta mai întâi o soluţie a problemei lui Banach.

Fie A şi B cele două cutii. Pentru a ajunge în situaţia dată, fumătorul scoate de $(2n-k+1)$ ori o cutie din buzunar şi anume:

- de n ori o cutie pentru a o goli;
- de $(n\text{-}k)$ ori cealaltă cutie, pentru a-i rămâne k bețe;
- de n ori prima cutie, pentru a constata că este goală.

Deci:

- în (2n-k) situații se obține cutia A de n ori și cutia B de (n-k) ori iar în situația (2n-k+1) se obține cutia A;

sau

- în (2n-k) situații se obține cutia B de n-ori și cutia A de (n-k) ori iar în situația (2n-k+1) se obține cutia B.

Fie A primul eveniment, B al doilea eveniment iar C_k evenimentul ca atunci când o cutie este goală, cealaltă să mai conțină k bețe.

Este clar că $C_k = A \cup B$ și $A \cap B = \emptyset$. Rezultă deci că $P(C_k) = P(A) + P(B)$.

Probabilitatea ca în $(2n-k)$ extrageri să se obțină de n ori prima cutie și de $(n-k)$ ori a doua cutie se calculează aplicând schema binomială. Valoarea acestei probabilități este

$$\binom{2n-k}{n-k}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \binom{2n-k}{n-k}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k}.$$

Probabilitatea ca în extracția de rang $(2n-k+1)$ să se obțină prima cutie este $\frac{1}{2}$.

Din cele de mai sus, rezultă

(2) $$P(A) = \frac{1}{2}\cdot\binom{2n-k}{n-k}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k}.$$

Analog se obține

(3) $$P(B) = \frac{1}{2}\cdot\binom{2n-k}{n-k}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k}.$$

Prin urmare, probabilitatea ca atunci când una dintre cutii este goală, cealaltă să mai conțină k bețe este exprimată prin:

(4) $$P(C_k) = \binom{2n-k}{n-k}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k}.$$

Se observă că evenimentele $(C_k)_{k=\overline{0,n}}$ formează un sistem complet de evenimente, în sensul că $\bigcup_{k=0}^{n} C_k = \Omega$ şi $C_i \cap C_j = \varnothing$ $(i \neq j)$. Rezultă atunci că are loc:

$$\sum_{k=0}^{n} P(C_k) = 1 \tag{5}$$

adică

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n-k}{n-k} \cdot \frac{1}{2^{2n-k}} = 1 \,. \tag{6}$$

Folosind formula combinărilor complementare $\binom{2n-k}{n-k} = \binom{2n-k}{n}$ egalitatea (6) poate fi scrisă în forma echivalentă:

$$\binom{2n}{n}\frac{1}{2^{2n}} + \binom{2n-1}{n} \cdot \frac{1}{2^{2n-1}} + \ldots + \frac{1}{2^n}\binom{n}{n} = 1 \tag{7}$$

sau

$$\binom{2n}{n} + 2\binom{2n-1}{n} + \ldots + 2^n\binom{n}{n} = 2^{2n} \,. \tag{8}$$

În încheiere, supunem atenţiei cititorilor şi următoarea problemă (vezi de exemplu [1]):

"*Un joc este format din n căsuţe şi k bile, unde k≤n. Care e probabilitatea ca în fiecare căsuţă să se găsească cel puţin o bilă? Folosind rezultatul precedent să se calculeze suma*

$$S_n^k = 1^k\binom{n}{1} - 2^k\binom{n}{2} + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot n^k\binom{n}{k} \text{"} \tag{9}$$

Se obţine $S_n^k = \begin{cases} 0 & , \textit{pentru } k < n \\ (-1)^{n-1} \cdot n! & , \textit{pentru } k = n \,. \end{cases}$

Bibliografie

1. **Bărbosu,D., Zelina,I.**, Calculul probabilităţilor, Editura Cub Press 22, Baia Mare, 1998
2. **Năstăsescu,C.** ş.a., Exerciţii şi probleme de algebră, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti 1981

A PROBABILISTIC METHOD FOR COMPUTING A COMBINATORIAL SUM

Abstract. The paper has a methodical character. A probabilistic method for the calculus of the sum (1) is indicated and the calculus of the sum (9) is proposed.

Primit: 01.09.1999

Universitatea de Nord Baia Mare
Facultatea de Ştiinţe
Catedra de Matematică şi Informatică
Str. Victoriei 76, 4800 Baia Mare
e-mail.dbarbosu@univer.ubm.ro