Lucrările Seminarului de
CREATIVITATE MATEMATICĂ
Vol. 8(1998-1999), 33 - 44

INEGALITĂŢI ÎNTRE FUNCŢII ŞI MEDII

D.M. BĂTINEŢU- GIURGIU

În cele ce urmează vom nota cu $\mathscr{M}(\mathbb{R}_+^*)$ mulţimea tuturor mediilor care se pot defini pe $\mathbb{R}_+^*$ iar cu $\mathscr{F}(\mathbb{R}_+^*)$ mulţimea tuturor funcţiilor $f:\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$. De asemenea vom nota cu A media aritmetică, G media geometrică, H media armonică şi P media pătratică, adică

$$A(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}; \; G = (a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n};$$

$$H = (a_1, a_2, \ldots, a_n) = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}; \; P(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}$$

unde $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ şi $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+^*$.

Este evident că $\{A, G, H, P\} \subset \mathscr{M}(\mathbb{R}_+^*)$.

Considerăm propoziţiile:

p: $M(M(x,y), M(z,t)) = M(x,y,z,t), \forall x,y,z,t \in \mathbb{R}_+^*$ cu $M \in \mathscr{M}(\mathbb{R}_+^*)$;

q: $M(x,y,z,t) = t \Rightarrow t = M(x,y,z)$ cu $x,y,z,t \in \mathbb{R}_+^*$ cu $M \in \mathscr{M}(\mathbb{R}_+^*)$;

r: $M(x,y,z, M(x,y,z)) = M(x,y,z), \forall x,y,z \in \mathbb{R}_+^*$ cu $M \in \mathscr{M}(\mathbb{R}_+^*)$;

Să notăm $\mathscr{N}(\mathbb{R}_+^*) = \{M \in \mathscr{M}(\mathbb{R}_+^*) \mid M$ verifică propoziţiile p,q,r$\}$. Deoarece

$\{A,G,H,P\} \subset \mathscr{N}(\mathbb{R}_+^*)$ rezultă că $\mathscr{N}(\mathbb{R}_+^*) \neq \emptyset$.

Demonstrăm acum

Propoziţia 1. Fie $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}_+^*)$ şi $M, N \in \mathscr{M}(\mathbb{R}_+^*)$. Dacă

$$(1) \qquad M(f(x), f(y)) = f(N(x,y)), \forall x, y \in \mathbb{R}_+^*$$

atunci

(2) $$M(f(x),f(y),f(z))=f(N(x,y,z)),\ \forall x,y,z\in\mathbb{R}_+^*.$$

Demonstrație. Deoarece $M\in\mathcal{M}(\mathbb{R}_+^*)$ rezultă că

(3) $$M(f(x),f(y),f(z),f(t))=M(M(f(x),f(y)),M(f(z),f(t))),\ \forall x,y,z,t\in\mathbb{R}_+^*$$

Deoarece $M(f(x),f(y))=f(N(x,y)),\forall x,y\in\mathbb{R}_+^*$ din egalitatea (3) deducem

(4) $$M(f(x),f(y),f(z),f(t))=M(f(N(x,y)),f(N(z,t)))=$$

$$=f(N(N(x,y),N(z,t)))=f(N(x,y,z,t)),\ \forall x,y,z,t\in\mathbb{R}_+^*.$$

Dacă în relația (4) luăm $t=N(x,y,z)$, conform propoziției r rezultă că

(5) $$M(f(x),f(y),f(z),f(t))=f(N(x,y,z))=f(t),\ \forall x,y,z\in\mathbb{R}_+^*.$$

Conform cu propoziția q din relația (5) obținem că

(6) $$f(t)=M(f(x),f(y),f(z)),\forall x,y,z\in\mathbb{R}_+^*\Rightarrow$$

$$\Rightarrow M(f(x),f(y),f(z))=f(N(x,y,z)),\forall x,y,z\in\mathbb{R}_+^*.$$

și cu aceasta propoziția este demonstrată.

Observând că $\{A, G, H, P\}\subset\mathcal{M}(\mathbb{R}_+^*)$, conform propoziției 1, pentru orice $f\in\mathcal{F}(\mathbb{R}_+^*)$ și orice $X,Y\in\{A,G,H,P\}$ din faptul că

(7) $$X(f(x),f(y))=f(Y(x,y)),\ \forall x,y\in\mathbb{R}_+^*,$$

rezultă că

(8) $$X(f(x),f(y),f(z))=f(Y(x,y,z)),\ \forall x,y,z\in\mathbb{R}_+^*$$

Aplicații.

A1. Dacă X=A, Y=G și dacă $f\in\mathcal{F}(\mathbb{R}_+^*)$ are proprietatea că $f(x)+f(y)=2f(\sqrt{xy}),\ \forall x,y\in\mathbb{R}_+^*$, atunci

$$f(x)+f(y)+f(z)=3f(\sqrt[3]{xyz}),\ \forall x,y,z\in\mathbb{R}_+^*$$

adică am obținut Problema C.6.1 din R.M.T. nr.2/1985, autor Marian Dincă.

A2. Dacă X=A, Y=H și dacă $f\in\mathcal{F}(\mathbb{R}_+^*)$ are proprietatea că

$$f(x)+f(y)=2f\left(\frac{2xy}{x+y}\right),\ \forall\ x,y\in\mathbb{R}_+^*,$$

atunci

$$f(x)+f(y)+f(z)=3f\left(\frac{3xyz}{xy+yz+zx}\right),\ \forall x,y,z\in\mathbb{R}_+^*,$$

adică am obținut una din problemele propuse la Olimpiada Locală de Matematică, Suceava 1987, autor Vasile Monacu.

În continuare ne vom rezuma la mediile A,G,H,P, la funcțiile din $\mathscr{F}(\mathbb{R}_+^*)$ și vom demonstra unele inegalități cu funcții și medii.

Propoziția 2. Dacă $f\in\mathscr{F}(\mathbb{R}_+^*)$ și $A(f(x),f(y))\geq f(A(x,y)),\ \forall x,y\in\mathbb{R}_+^*$ atunci

(9) $$A(f(x),f(y),f(z))\geq f(A(x,y,z)),\ \forall x,y,z\in\mathbb{R}_+^*$$

Demonstrație. Conform condiției din enunț și propoziției p avem

(10) $$A(f(x),f(y),f(z),f(t))=A(f(x),f(y),A(f(z),f(t)))\geq$$

$$\geq A(f(A(x,y)),f(A(z,t)))\geq f(A(A(x,y),A(z,t)))=f(A(x,y,z,t)),\ \forall x,y,z,t\in\mathbb{R}_+^*.$$

Dacă în (10) luăm $t=A(x,y,z)$ obținem

$$A(f(x),f(y),f(z),f(t))\geq f(A(x,y,z))=f(t),\ \forall x,y,z\in\mathbb{R}_+^*\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x)+f(y)+f(z)\geq 3f(t),\ \forall x,y,z\in\mathbb{R}_+^*\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A(f(x),f(y),f(z))\geq f(t)=f(A(x,y,z)),\ \forall x,y,z\in\mathbb{R}_+^*.$$

Propoziția 3. Dacă $f\in\mathscr{F}(\mathbb{R}_+^*)$ și $A(f(x),f(y))\geq f(G(x,y)),\ \forall x,y\in\mathbb{R}_+^*$ atunci

(11) $$A(f(x),f(y))f(z))\geq f(G(x,y,z)),\ \forall x,y,z\in\mathbb{R}_+^*.$$

Demonstrație. Pe baza condiției din enunț și a faptului că A,G verifică propoziția p avem

(12) $$A(f(x),f(y),f(z),f(t))=A(A(f(x),f(y)),A(f(z),f(t)))\geq$$

$$\geq A(f(G(x,y)),f(G(z,t)))\geq f(G(G(x,y)),G(z,t)))=$$

$$= f(G(x,y,z,t)), \forall x,y,z,t \in \mathbb{R}_+^*.$$

Dacă în (12) luăm $t = G(x,y,z)$ obținem

$$A(f(x),f(y),f(z),f(t)) \geq f(t), \ \forall x,y,z \in \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A(f(x),f(y),f(z)) \geq f(t) = f(G(x,y,z)), \ \forall x,y,z \in \mathbb{R}_+^*.$$

Propoziția 4. Dacă $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}_+^*)$ și $A(f(x),f(y)) \geq f(H(x,y)), \ \forall x,y \in \mathbb{R}_+^*$, atunci

(13) $$A(f(x),f(y)f(z)) \geq f(H(x,y,z)), \ \forall x,y,z \in \mathbb{R}_+^*$$

Demonstrație. Ca și în propozițiile precedente, avem

(14) $$A(f(x),f(y),f(z),f(t)) \geq A(A(f(x),f(y)), A(f(z),f(t))) \geq$$

$$\geq A(f(H(x,y)),f(H(z,t))) \geq f(H(H(x,y), H(z,t))) =$$

$$= f(H(x,y,z,t)) \ \forall x,y,z,t \in \mathbb{R}_+^*$$

Dacă în (14) luăm $t = H(x,y,z)$ obținem

$$A(f(x),f(y)f(z),f(t)) \geq f(H(x,y,z)) = f(t), \ \forall x,y,z \in \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A(f(x),f(y),f(z)) \geq f(t) = f(H(x,y,z)), \ \forall x,y,z \in \mathbb{R}_+^*.$$

Propoziția 5. Dacă $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}_+^*)$ și

$A(f(x),f(y)) \geq f(P(x,y))$, $\forall x,y \in \mathbb{R}_+^*$, atunci

(15) $$A(f(x),f(y),f(z)) \geq f(P(x,y,z)), \ \forall x,y \in \mathbb{R}_+^*$$

Demonstrație. Avem

(16) $$A(f(x),f(y),f(z),f(t)) = A\{A(f(x),f(y)), A(f(z),f(t))\} \geq$$

$$\geq A(f(P(x,y)), f(P(z,t))) \geq f(P(P(x,y), P(z,t))) =$$

$$= f(P(x,y,z,t)), \ \forall x,y,z,t \in \mathbb{R}_+^*$$

În relațiile (16) luăm $t = P(x,y,z)$ și astfel obținem

$$A(f(x),f(y),f(z),f(t)) \geq f(P(x,y,z)) = f(t)\ ,\quad \forall\ x,y,z \in \mathbb{R}_+^* \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A(f(x),f(y),f(z)) \geq f(t) = f(P(x,y,z))\ ,\quad \forall\ x,y,z \in \mathbb{R}_+^*$$

Propoziţia 6. Dacă $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}_+^*)$ şi

(17) $G(f(x),f(y)) \geq f(A(x,y))\ ,\quad \forall\ x,y \in \mathbb{R}_+^*$, atunci

$$G(f(x),f(y),f(z)) \geq f(A(x,y,z))\ ,\quad \forall\ x,y,z \in \mathbb{R}_+^*\ .$$

Demonstraţia 1. Pentru orice $x,y \in \mathbb{R}_+^*$, avem

$$G(f(x),f(y)) \geq f(A(x,y)) \Leftrightarrow f(x)\cdot f(y) \geq f^2(A(x,y))\ .$$

Prin urmare

(18) $f(x)\cdot f(y)\cdot f(z)\cdot f(t) \geq \{f(A(x,y))\cdot f(A(z,t))\}^2 \geq f^4\{A(A(x,y),A(z,t))\} =$

$$= f^4(A(x,y,z,t))\ ,\quad \forall\ x,y,z,t \in \mathbb{R}_+^*\ .$$

Dacă în (18) luăm $t = A(x,y,z)$ deducem că

$$f(x)\cdot f(y)\cdot f(z)\cdot f(t) \geq f^4(t), \forall x,y,z \in \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x)\cdot f(y)\cdot f(z) \geq f^3(t), \forall x,y,z \in \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow G(f(x),f(y),f(z)) \geq f(t) = f(A(x,y,z))\ ,\quad \forall\ x,y,z \in \mathbb{R}_+^*$$

Demonstraţia 2. Considerăm funcţia $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $g = \ln f$ şi atunci condiţia enunţului devine

$$A(g(x),g(y)) \geq g(A(x,y))\ ,\quad \forall\ x,y \in \mathbb{R}_+^*\ .$$

Prin urmare, conform Propoziţiei 2 avem

$$A(g(x),g(y),g(z)) \geq g(A(x,y,z))\ ,\ \forall\ x,y,z \in \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow$$

$$\ln f(x) + \ln f(y) + \ln f(z) \geq 3 \ln f(A(x,y,z))\ ,\ \forall\ x,y,z \in \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln G(f(x),f(y),f(z)) \geq \ln f(A(x,y,z))\ ,\quad \forall\ x,y,z \in \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow G(f(x),f(y),f(z)) \geq f(A(x,y,z)), \quad \forall\, x,y,z \in \mathbb{R}_+^*.$$

Propoziţia 7. Dacă $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}_+^*)$ şi

(19) $$G(f(x),f(y)) \geq f(G(x,y)), \ \forall\, x,y \in \mathbb{R}_+^*, \text{ atunci}$$

$$G(f(x),f(y),f(z)) \geq f(G(x,y,z)), \quad \forall\, x,y,z \in \mathbb{R}_+^*.$$

Demonstraţia 1. Condiţia enunţului este echivalentă cu

$f(x)\cdot f(y) \geq f^2(G(x,y)), \ \forall\, x,y \in \mathbb{R}_+^*$ şi atunci

(20) $$f(x)\cdot f(y)\cdot f(z)\cdot f(t) \geq f^2(G(x,y))\cdot f^2(G(z,t)) = [f(G(x,y))\cdot f(G(z,t))]^2 \geq$$

$$\geq f^4(G(G(x,y),G(z,t))) = f^4(G(x,y,z,t)), \ \forall\, x,y,z,t \in \mathbb{R}_+^*.$$

Dacă în (20) considerăm $t = G(x,y,z)$ obţinem

$$f(x)\cdot f(y)\cdot f(z)\cdot f(t) \geq f^4(t), \forall x,y,z \in \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow f(x)\cdot f(y)\cdot f(z) \geq f^3(t), \forall x,y,z \in \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow G(f(x),f(y),f(z)) \geq f(G(x,y,z)), \quad \forall\, x,y,z \in \mathbb{R}_+^*.$$

Demonstraţia 2. Considerăm funcţia $g: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $g = \ln f$ şi atunci condiţia enunţului devine, $A(g(x),g(y)) \geq g(G(x,y)), \ \forall\, x,y \in \mathbb{R}_+^*$. Prin urmare, conform propoziţiei 3, avem

$$A(g(x),g(y),g(z)) \geq g(G(x,y,z)), \quad \forall\, x,y,z \in \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln f(x) + \ln f(y) + \ln f(z) \geq 3 \ln f(G(x,y,z)), \quad \forall\, x,y,z \in \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln(f(x)\cdot f(y)\cdot f(z)) \geq \ln f^3(G(x,y,z)), \quad \forall\, x,y,z \in \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow G(f(x),f(y),f(z)) \geq f(G(x,y,z)), \quad \forall\, x,y,z \in \mathbb{R}_+^*.$$

Propoziţia 8. Dacă $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}_+^*)$ şi

$$G(f(x),f(y)) \geq f(H(x,y)), \forall\, x,y \in \mathbb{R}_+^*$$

atunci

(21) $$G(f(x),f(y),f(z)) \geq f(H(x,y,z))\ ,\ \forall\ x,y,z \in \mathbb{R}_+^*\ .$$

Demonstrația 1. Condiția enunțului este echivalentă cu

$f(x)\cdot f(y) \geq f^2(H(x,y))\ ,\ \forall\ x,y \in \mathbb{R}_+^*$ și prin urmare

(22) $$f(x)\cdot f(y)\cdot f(z)\cdot f(t) \geq f^2(H(x,y))\cdot f^2(H(z,t)) = [f(H(x,y))\cdot f(H(z,t))]^2 \geq$$

$$\geq f^4(H(H(x,y),H(z,t))) = f^4(H(x,y,z,t))\ ,\ \forall\ x,y,z,t \in \mathbb{R}_+^*\ .$$

În relațiile (22) luăm $t = H(x,y,z)$ și astfel obținem

$$f(x)\cdot f(y)\cdot f(z)\cdot f(t) \geq f^4(t) \Rightarrow f(x)\cdot f(y)\cdot f(z) \geq f^3(t)\ ,\ \forall\ x,y,z \in \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow G(f(x),f(y),f(z)) \geq f(t) = f(H(x,y,z))\ ,\ \forall\ x,y,z \in \mathbb{R}_+^*\ .$$

Demonstrația 2. Considerăm și de această dată funcția $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}\ ,\ g = \ln f$ și atunci condiția enunțului este echivalentă cu $A(g(x),g(y)) \geq g(H(x,y))\ ,\ \forall\ x,y \in \mathbb{R}_+^*\ .$ Conform Propoziției 4 avem că

$$A(g(x),g(y),g(z)) \geq g(H(x,y,z))\ ,\ \forall\ x,y,z \in \mathbb{R}_+^* \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G(f(x),f(y),f(z)) \geq f(H(x,y,z))\ ,\ \forall\ x,y,z \in \mathbb{R}_+^*\ .$$

Propoziția 9. Dacă $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}_+^*)$ și

$G(f(x),f(y)) \geq f(P(x,y))\ ,\ \forall\ x,y \in \mathbb{R}_+^*\ ,$ atunci

(23) $$G(f(x),f(y),f(z)) \geq f(P(x,y,z))\ ,\ \forall\ x,y,z \in \mathbb{R}_+^*\ .$$

Demonstrație. Condiția enunțului este echivalentă cu

$f(x)\cdot f(y) \geq f^2(P(x,y))\ ,\ \forall\ x,y \in \mathbb{R}_+^*$ și deci

(24) $$f(x)\cdot f(y)\cdot f(z)\cdot f(t) \geq f^2(P(x,y))\cdot f^2(P(z,t)) \geq f^4(P(P(x,y),P(z,t))) =$$

$$= f^4(P(x,y,z,t))\ ,\ \forall\ x,y,z,t \in \mathbb{R}_+^*\ .$$

Dacă în relația (24) luăm $t = P(x,y,z)$ deducem că

$f(x)\cdot f(y)\cdot f(z)\cdot f(t)\geq f^4(t) \Leftrightarrow \forall\, x,y,z\in \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow f(x)\cdot f(y)\cdot f(z)\geq f^3(t), \forall x,y,z\in \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow G(f(x),f(y),f(z)) \geq f(t) = f(P(x,y,z))\ ,\ \forall\ x,y,z \in \mathbb{R}_+^*$.

Propoziţia 10. Dacă $f\in \mathscr{F}(\mathbb{R}_+^*)$ şi

$H(f(x),f(y)) \geq f(A(x,y))\ ,\ \forall\ x,y\in \mathbb{R}_+^*$, atunci

(25) $H(f(x),f(y),f(z)) \geq f(A(x,y,z))\ ,\ \forall\ x,y,z\in \mathbb{R}_+^*$.

Demonstraţie. Fie $h:\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$, $h=\dfrac{1}{f}$ şi atunci condiţia enunţului este echivalentă cu

$$A(h(x),h(y)) \leq h(A(x,y))\ ,\ \ \forall\ x,y\in \mathbb{R}_+^*$$

şi deci, conform Propoziţiei 2, avem

$$A(h(x),h(y),h(z)) \leq h(A(x,y,z))\ ,\ \ \forall\ x,y,z\in \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow H(f(x),f(y),f(z)) \geq f(A(x,y,z))\ ,\ \forall\ x,y,z\in \mathbb{R}_+^*.$$

Propoziţia 11. Dacă $f\in \mathscr{F}(\mathbb{R}_+^*)$ şi

$H(f(x),f(y)) \geq f(G(x,y))\ ,\ \forall\ x,y\in \mathbb{R}_+^*$, atunci

(26) $H(f(x),f(y),f(z)) \geq f(G(x,y,z))\ ,\ \forall\ x,y,z\in \mathbb{R}_+^*$.

Demonstraţie. Considerăm funcţia $h:\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$, $h=\dfrac{1}{f}$ şi atunci condiţia enunţului este echivalentă cu

(27) $$A(h(x),h(y)) \leq h(g(x,y))\ ,\ \ \forall\ x,y\in \mathbb{R}_+^*$$

Conform Propoziţiei 3 deducem că

$$A(h(x),h(y),h(z)) \leq h(G(x,y,z))\ ,\ \ \forall\ x,y,z\in \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow H(f(x),f(y),f(z)) \geq f(G(x,y,z))\ ,\ \forall\ x,y,z\in \mathbb{R}_+^*.$$

Propoziţia 12. Dacă $f\in \mathscr{F}(\mathbb{R}_+^*)$ şi

$$H(f(x),f(y)) \geq f(H(x,y)),\ \forall\ x,y \in \mathbb{R}_+^*, \text{ atunci}$$

(28) $$H(f(x),f(y),f(z)) \geq f(H(x,y,z)),\ \forall\ x,y,z \in \mathbb{R}_+^*.$$

Demonstrație. Considerăm și acum funcția $h : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$, $h = \dfrac{1}{f}$ și atunci condiția enunțului este echivalentă cu

(29) $$h(H(x,y)) \geq A(h(x),h(y)),\ \forall\ x,y \in \mathbb{R}_+^*$$

și atunci conform Propoziției 4 rezultă că

$$h(H(x,y,z)) \geq A(h(x),h(y),h(z)),\ \forall\ x,y,z \in \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow H(f(x),f(y),f(z)) \geq f(H(x,y,z)),\ \forall\ x,y,z \in \mathbb{R}_+^*.$$

Propoziția 13. Dacă $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}_+^*)$ și

$$H(f(x),f(y)) \geq f(P(x,y)),\ \forall\ x,y \in \mathbb{R}_+^*,$$

atunci

(30) $$H(f(x),f(y),f(z)) \geq f(P(x,y,z)),\ \forall\ x,y,z \in \mathbb{R}_+^*.$$

Demonstrație. Fie $h : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$, $h = \dfrac{1}{f}$. Condiția enunțului este echivalentă cu

(31) $$h(P(x,y)) \geq A(h(x),h(y)),\ \forall\ x,y \in \mathbb{R}_+^*.$$

Rezultă atunci că

$$h(P(x,y,z)) \geq A(h(x),h(y),h(z)),\ \forall\ x,y,z \in \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow H(f(x),f(y),f(z)) \geq f(P(x,y,z)),\ \forall\ x,y,z \in \mathbb{R}_+^*.$$

Propoziția 14. Dacă $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}_+^*)$ și dacă

$$P(f(x),f(y)) \geq f(A(x,y)),\ \forall\ x,y \in \mathbb{R}_+^*, \text{ atunci}$$

(32) $$P(f(x),f(y),f(z)) \geq f(A(x,y,z)),\ \forall\ x,y,z \in \mathbb{R}_+^*.$$

Demonstrație. Condiția enunțului este echivalentă cu

$$f^2(x)+f^2(y)\geq 2\cdot f^2(A(x,y))\,,\quad \forall\ x,y\in\mathbb{R}_+^*$$

și atunci

$$f^2(x)+f^2(y)+f^2(z)+f^2(t)\geq 2\cdot f^2(A(x,y))+2\cdot f^2(A(z,t))\geq$$

$$\geq 4\cdot f^2(A(A(x,y),A(z,t)))=4f^2(A(x,y,z,t))\,,\quad \forall\ x,y,z,t\in\mathbb{R}_+^*\,.$$

Dacă în relația precedentă luăm $t=A(x,y,z)$ deducem că

$$f^2(x)+f^2(y)+f^2(z)+f^2(t)\geq 4\cdot f^2(t)\,,\ \forall\ x,y,z\in\mathbb{R}_+^*\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f^2(x)+f^2(y)+f^2(z)\geq 3\cdot f^2(t)\,,\ \forall\ x,y,z\in\mathbb{R}_+^*\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(f(x),f(y),f(z))\geq f(t)=f(A(x,y,z))\,,\quad \forall\ x,y,z\in\mathbb{R}_+^*\,.$$

Propoziția 15. Dacă $f\in\mathcal{F}(\mathbb{R}_+^*)$ și

$$P(f(x),f(y))\geq f(G(x,y))\,,\quad \forall\ x,y\in\mathbb{R}_+^*\,,$$

atunci

(33) $$P(f(x),f(y),f(z))\geq f(G(x,y,z))\,,\ \forall\ x,y,z\in\mathbb{R}_+^*\,.$$

Demonstrație. Condiția enunțului este echivalentă cu

(34) $$f^2(x)+f^2(y)\geq 2\cdot f^2(G(x,y))\,,\quad \forall\ x,y\in\mathbb{R}_+^*\,.$$

Prin urmare

(35) $$f^2(x)+f^2(y)+f^2(z)+f^2(t)\geq 2\cdot f^2(G(x,y))+2\cdot f^2(G(z,t))\geq$$

$$\geq 4\cdot f^2(G(G(x,y),G(z,t)))=4f^2(G(x,y,z,t))\,,\quad \forall\ x,y,z,t\in\mathbb{R}_+^*$$

În relația (35) luăm $t=G(x,y,z)$ și obținem

$$f^2(x)+f^2(y)+f^2(z)+f^2(t)\geq 4\cdot f^2(t)\,,\ \forall\ x,y,z\in\mathbb{R}_+^*\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f^2(x)+f^2(y)+f^2(z)\geq 3\cdot f^2(t)\,,\ \forall\ x,y,z\in\mathbb{R}_+^*\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(f(x),f(y),f(z))\geq f(t)=f(G(x,y,z))\,,\quad \forall\ x,y,z\in\mathbb{R}_+^*\,.$$

Propoziţia 16. Dacă $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}_+^*)$ şi

$$P(f(x), f(y)) \geq f(H(x,y)), \quad \forall\, x,y \in \mathbb{R}_+^*,$$

atunci

(36) $$P(f(x), f(y), f(z)) \geq f(H(x,y,z)), \ \forall\, x,y,z \in \mathbb{R}_+^*.$$

Demonstraţie. Condiţia enunţului este echivalentă cu

$$f^2(x) + f^2(y) \geq 2 \cdot f^2(H(x,y)), \quad \forall\, x,y \in \mathbb{R}_+^*$$

şi atunci avem

(37) $$f^2(x) + f^2(y) + f^2(z) + f^2(t) \geq 2 \cdot f^2(H(x,y)) + 2 \cdot f^2(H(z,t)) \geq$$

$$\geq 4 \cdot f^2(H(H(x,y), H(z,t))) = 4 f^2(H(x,y,z,t)), \quad \forall\, x,y,z,t \in \mathbb{R}_+^*.$$

În relaţia (37) înlocuim $t = H(x,y,z)$ şi obţinem

$$f^2(x) + f^2(y) + f^2(z) + f^2(t) \geq 4 \cdot f^2(t), \ \forall\, x,y,z \in \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f^2(x) + f^2(y) + f^2(z) \geq 3 \cdot f^2(t), \ \forall\, x,y,z \in \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(f(x), f(y), f(z)) \geq f(t) = f(H(x,y,z)), \quad \forall\, x,y,z \in \mathbb{R}_+^*.$$

Propoziţia 17. Dacă $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}_+^*)$ şi

$$P(f(x), f(y)) \geq f(P(x,y)), \quad \forall\, x,y \in \mathbb{R}_+^*,$$

atunci

(38) $$P(f(x), f(y), f(z)) \geq f(P(x,y,z)), \ \forall\, x,y,z \in \mathbb{R}_+^*.$$

Demonstraţie. Condiţia enunţului este echivalentă cu

(39) $$f^2(x) + f^2(y) \geq 2 \cdot f^2(P(x,y)), \quad \forall\, x,y \in \mathbb{R}_+^*.$$

Prin urmare

(40) $$f^2(x) + f^2(y) + f^2(z) + f^2(t) \geq 2 \cdot f^2(P(x,y)) + 2 \cdot f^2(P(z,t)) \geq$$

$$\geq 4 \cdot f^2(P(P(x,y), P(z,t))) = 4 f^2(P(x,y,z,t)), \ \forall\, x,y,z,t \in \mathbb{R}_+^*.$$

În relaţia (40) înlocuim $t = P(x,y,z)$ şi obţinem

$$f^2(x)+f^2(y)+f^2(z)+f^2(t)\geq 4\cdot f^2(t)\ ,\ \forall\ x,y,z\in\mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f^2(x)+f^2(y)+f^2(z)\geq 3\cdot f^2(t)\ ,\ \forall\ x,y,z\in\mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(f(x),f(y),f(z))>f(t)=f(P(x,y,z))\ ,\ \ \forall\ x,y,z\in\mathbb{R}_+^*\ .$$

Observații. 1) Dacă în fiecare din propozițiile demonstrate înlocuim semnul $>$ cu semnul $\leq$ obținem alte 17 propoziții derivate.

2) Prin inducție matematică, toate cele 17 propoziții pot fi demonstrate pentru orice $n\geq 2$. De exemplu, la Concursul Laurențiu Duican, Brașov 1998, pentru clasa a X-a a fost propusă următoarea problemă de autorii D.M. Bătinețu-Giurgiu și Marian Dincă.

Dacă $f:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$ are proprietatea că $f(x)+f(y)\geq 2f\left(\sqrt{x\cdot y}\right)$, $\forall\ x,y\in\mathbb{R}_+^*$, atunci

$$f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_n)\geq nf\left(\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot\cdots\cdot x_n}\right), \forall n\in\mathbb{N}^*-\{1\}, \forall x_k\in\mathbb{R}_+^*,\ k=\overline{1,n}.$$

Se vede prin urmare că această problemă este o extindere a Propoziției 3.

INEQUALITIES BETWEEN FUNCTIONS AND MEANS

Abstract. In this article we present some interesting inequalities with functions and means.

Primit: 20.10.1998

Colegiul Național "Matei Basarab"
Str. Matei Basarab 32
București 70096