Lucrările Seminarului de
CREATIVITATE MATEMATICĂ
Vol. 8 (1998-1999), 45 - 54

ORDINUL DE CONVERGENȚĂ AL UNOR ȘIRURI DE TIP EULER-IOACHIMESCU

D. M. BĂTINEȚU

Conceptul de șir de tip Euler-Ioachimescu a fost introdus în lucrarea [4] astfel: fie $f, F: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ două funcții dintre care f este continuă și F o primitivă a lui f, $(r_n)_{n\geq 1}$ un șir de numere reale strict pozitive, iar $(a_n)_{n\geq 1}$ un șir de numere reale cu $a_1>0$ și $a_{n+1} = a_n + r_n, (\forall)n \in \mathbb{N}^*$.

Am numit șir de tip Euler-Ioachimescu, definit de funcția f și de șirul $(a_n)_{n\geq 1}$, un șir $(x_n)_{n\geq 1}$ cu:

$$x_n = -F(a_n) + \sum_{k=1}^{n} r_k \cdot a_k \quad (1)$$

De asemenea în [4] am demonstrat următoarea:

Teoremă. *Dacă f este descrescătoare iar șirul $(r_n)_{n\geq 1}$ este descrescător și convergent către $r>0$, atunci șirul de tip Euler-Ioachimescu definit de funcția f și de șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent.*

În lucrările [2],[3] și [5] sunt abordate diferite șiruri de tip Euler-Ioachimescu prin care se generalizează șirul constantei lui Euler sau șirul lui A.G.Ioachimescu.

În demonstrațiile care urmează vom utiliza următoarele inegalități valabile pentru orice funcție $h:[a,b]\to\mathbb{R}$ derivabilă şi convexă pe [a,b] (a se vedea [7]):

(2) $$h\left(\frac{a+b}{2}\right)\le\frac{1}{b-a}\int_a^b h(x)\,dx\le\frac{h(a)+h(b)}{2},$$

unde inegalitățile sunt stricte dacă h este strict convexă.

De asemenea dacă h este concavă pe [a,b], atunci:

(3) $$h\left(\frac{a+b}{2}\right)\ge\frac{1}{b-a}\int_a^b h(x)\,dx\ge\frac{h(a)+h(b)}{2},$$

unde inegalitățile sunt stricte dacă h este strict concavă.

Propoziția 1. Dacă funcția $f:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}_+^*$ este de două ori derivabilă, convexă pe $\mathbb{R}_+^*$ cu $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$, şirul $(r_n)_{n\ge1}$ este crescător şi convergent către $r>0$ iar şirul Euler-Ioachimescu $(x_n)_{n\ge1}$ definit de f şi de $(a_n)_{n\ge1}$ este convergent cu $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x\in\mathbb{R}$, atunci:

(4) $$x_n-x\le\frac{r_n\cdot f(a_n)}{2},\ (\forall)\,n\in\mathbb{N}^*.$$

Demonstrație. Considerăm şirul $(u_n)_{n\ge1}$, $u_n=x_n-\dfrac{r_n\cdot f(a_n)}{2}$ cu $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=x$. Observăm că:

(5) $$u_{n+1}-u_n=x_{n+1}-x_n-\frac{r_{n+1}\cdot f(a_{n+1})}{2}+\frac{r_n\cdot f(a_n)}{2}=$$

$$=r_{n+1}\cdot f(a_{n+1})-\frac{r_{n+1}\cdot f(a_{n+1})}{2}+\frac{r_n\cdot f(a_n)}{2}-F(a_{n+1})+F(a_n)=$$

$$= \frac{r_n \cdot f(a_n) + r_{n+1} \cdot f(a_{n+1})}{2} - \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)\,dx \geq$$

$$\geq r_n \cdot \frac{f(a_n) + f(a_{n+1})}{2} - \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)\,dx,\ (\forall) n \in \mathbb{N}^* .$$

Deoarece f este convexă rezultă că:

$$(6)\qquad \frac{1}{r_n} \cdot \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)\,dx \leq \frac{f(a_n) + f(a_{n+1})}{2},\ (\forall) n \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{r_n (f(a_n) + f(a_{n+1}))}{2} - \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)\,dx \geq 0,\ (\forall)\, n \in \mathbb{N}^* .$$

Din inegalitățile (5) și (6) rezultă că $u_{n+1} - u_n \geq 0,\ (\forall)\, n \in \mathbb{N}^*$, adică șirul $(u_n)_{n \geq 1}$ este crescător. Deoarece $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = x$ rezultă că

$$u_n \leq x, (\forall) n \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow x_n - \frac{r_n \cdot f(a_n)}{2} \leq x,\ (\forall) n \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow$$

$$(7)\qquad x_n - x \leq \frac{r_n \cdot f(a_n)}{2},\ (\forall) n \in \mathbb{N}^* .$$

Dacă șirul $(r_n)_{n \geq 1}$ are proprietatea că $r_n = r > 0, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$ adică este constant, atunci $a_{n+1} = a_n + r, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$ ceea ce arată că $(a_n)_{n \geq 1}$ este o progresie aritmetică. În condițiile Propoziției 1, șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este convergent la $x \in \mathbb{R}$ și atunci relația (7) devine:

$$(8)\qquad x_n - x \leq \frac{r}{2} \cdot f(a_n),\ (\forall) n \in \mathbb{N}^* .$$

Propoziția 2. Dacă funcția $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ este de două ori derivabilă și convexă pe $\mathbb{R}_+^*$ cu $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$ și dacă funcția $g: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$, $g(x) = x \cdot f(x)$ este concavă pe $\mathbb{R}_+^*$, șirul $(r_n)_{n \geq 1}$ este descrescător, convergent către r>0 iar șirul

Euler-Ioachimescu $(x_n)_{n\ge1}$ definit de f şi de $(a_n)_{n\ge1}$ este convergent cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, atunci:

(9) $$x_n - x \ge \frac{r_n \cdot a_n \cdot f(a_n)}{2a_n + r_n},\ (\forall)\, n \in \mathbb{N}^*.$$

Demonstraţie. Considerăm şirul

$$(v_n)_{n\ge1},\ v_n = x_n - \frac{r_n \cdot a_n \cdot f(a_n)}{2a_n + r_n} = x_n - \frac{r_n \cdot a_n \cdot f(a_n)}{a_n + a_{n+1}} \quad \text{cu} \quad \lim_{n\to\infty} v_n = x.$$

Observăm că:

(10) $$v_{n+1} - v_n = x_{n+1} - x_n - \frac{r_{n+1} \cdot a_{n+1} \cdot f(a_{n+1})}{a_{n+1} + a_{n+2}} + \frac{r_n \cdot a_n \cdot f(a_n)}{a_n + a_{n+1}} =$$

$$= r_{n+1} \cdot f(a_{n+1}) - \frac{r_{n+1} \cdot a_{n+1} \cdot f(a_{n+1})}{a_{n+1} + a_{n+2}} + \frac{r_n \cdot a_n \cdot f(a_n)}{a_n + a_{n+1}} =$$

$$= \frac{r_{n+1} \cdot a_{n+2} \cdot f(a_{n+1})}{a_{n+1} + a_{n+2}} + \frac{r_n \cdot a_n \cdot f(a_n)}{a_n + a_{n+1}} - \int_{a_{n+1}}^{a_{n+2}} f(x)\,dx,\ (\forall)\, n \in \mathbb{N}^*.$$

În continuare vom arăta că:

(11) $$\frac{r_{n+1} \cdot a_{n+2} \cdot f(a_{n+1})}{a_{n+1} + a_{n+2}} \le \frac{r_{n+1} \cdot a_{n+1} \cdot f(a_{n+1})}{a_n + a_{n+1}},\ (\forall)\, n \in \mathbb{N}^*.$$

Inegalitatea (11) este echivalentă cu:

$$a_{n+2}(a_n + a_{n+1}) \le a_{n+1}(a_{n+1} + a_{n+2}),\ (\forall)\, n \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_{n+2} \cdot a_{n+1} + a_{n+2} \cdot a_n \le a_{n+1}^2 + a_{n+1} \cdot a_{n+2},\ (\forall)\, n \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_{n+2} \cdot a_n \le a_{n+1}^2,\ (\forall) n \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow a_n(a_n + r_n + r_{n+1}) \le (a_n + r_n)^2,\ (\forall)\, n \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_n^2 + a_n \cdot r_n + a_n \cdot r_{n+1} \le a_n^2 + 2a_n \cdot r_n + r_n^2,\ (\forall)\, n \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow$$

$\Rightarrow a_n \cdot r_{n+1} \le a_n \cdot r_n + r_n^2, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$.

Deoarece $r_{n+1} \le r_n$ rezultă că $a_n \cdot r_{n+1} \le a_n \cdot r_n, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$ şi deci $a_n \cdot r_{n+1} \le a_n \cdot r_n < a_n \cdot r_n + r_n^2, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$. Cu aceasta inegalitatea (11) este verificată. Conform cu (10) şi (11) avem:

$$(12) \quad v_{n+1} - v_n \le \frac{r_{n+1} \cdot a_{n+1} \cdot f(a_{n+1}) + r_n \cdot a_n f(a_n)}{a_n + a_{n+1}} - \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x) \cdot dx \le$$

$$\le \frac{r_n}{a_{n+1} + a_n} \cdot \left(a_n \cdot f(a_n) + a_{n+1} \cdot f(a_{n+1})\right) - \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)\, dx =$$

$$= \frac{2r_n}{a_n + a_{n+1}} \cdot \frac{a_n \cdot f(a_n) + a_{n+1} \cdot f(a_{n+1})}{2} - \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)\, dx, (\forall) n \in \mathbb{N}^*.$$

Deoarece f este convexă pe $\mathbb{R}_+^*$, în conformitate cu (2) avem:

$$(13) \quad f\left(\frac{a_n + a_{n+1}}{2}\right) \le \frac{1}{r_n} \cdot \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)\, dx, (\forall) n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_n \cdot f\left(\frac{a_n + a_{n+1}}{2}\right) \le \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)\, dx, (\forall) n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)\, dx \le -r_n \cdot f\left(\frac{a_n + a_{n+1}}{2}\right), (\forall) n \in \mathbb{N}^*.$$

Din relaţiile (12) şi (13) deducem că:

$$(14) \quad v_{n+1} - v_n \le \frac{2\,r_n}{a_n + a_{n+1}} \cdot \frac{a_n f(a_n) + a_{n+1} \cdot f(a_{n+1})}{2} - r_n \cdot f\left(\frac{a_n + a_{n+1}}{2}\right) =$$

$$=\frac{2\cdot r_n}{a_n+a_{n+1}}\cdot\left(\frac{g(a_n)+g(a_{n+1})}{2}-\frac{a_n+a_{n+1}}{2}\cdot f\left(\frac{a_{n+1}+a_n}{2}\right)\right)=$$

$$=\frac{2\cdot r_n}{a_n+a_{n+1}}\cdot\left(\frac{g(a_n)+g(a_{n+1})}{2}-\frac{a_n+a_{n+1}}{2}\cdot f\left(\frac{a_{n+1}+a_n}{2}\right)\right)=$$

$$=\frac{2\cdot r_n}{a_n+a_{n+1}}\cdot\left(\frac{g(a_n)+g(a_{n+1})}{2}-g\left(\frac{a_n+a_{n+1}}{2}\right)\right),\ (\forall)\,n\in\mathbb{N}^*$$

Deoarece g este concavă pe $\mathbb{R}_+^*$, în conformitate cu (13) obținem

(15) $$g\left(\frac{a_n+a_{n+1}}{2}\right)\geq\frac{g(a_n)+g(a_{n+1})}{2},(\forall)\,n\in\mathbb{N}^*$$

Relațiile (14) și (15) ne arată că $v_{n+1}-v_n<0,(\forall)n\in\mathbb{N}^*$ adică $(v_n)_{n\geq 1}$ este descrescător. Deoarece $\lim_{n\to\infty} v_n=x$ rezultă că

$$x\leq v_n,\ (\forall)n\in\mathbb{N}^*\Leftrightarrow x\leq x_n-\frac{r_n\cdot a_n\cdot f(a_n)}{2a_n+r_n},\ (\forall)n\in\mathbb{N}^*\Leftrightarrow$$

(16) $$\frac{r_n\cdot a_n\cdot f(a_n)}{2a_n+r_n}\leq x_n-x,\ (\forall)\,n\in\mathbb{N}^*.$$

Dacă șirul $(r_n)_{n\geq 1}$ are proprietatea că $r_n=r>0,(\forall)n\in\mathbb{N}^*$ adică este constant, atunci $(a_n)_{n\geq 1}$ este o progresie aritmetică de rație r. În condițiile Propoziției 2, șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent la $x\in\mathbb{R}$ și atunci relația (16) devine:

(17) $$\frac{r\cdot a_n\cdot f(a_n)}{2\,a_n+r}\leq x_n-x,\ (\forall)n\in\mathbb{N}^*.$$

Teoremă. *Dacă* $r_n=r>0,\ (\forall)n\in\mathbb{N}^*,a_{n+1}=a_n+r,(\forall)n\in\mathbb{N}^*$, *funcția* $f:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}_+^*$, *este de două ori derivabilă și convexă pe* $\mathbb{R}_+^*$, *cu* $\lim_{x\to\infty}f(x)=+\infty$

iar funcţia $g:\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$, $g(x) = x \cdot f(x)$ *este concavă pe* $\mathbb{R}_+^*$, *atunci şirul Euler-Ioachimescu* $(x_n)_{n\geq 1}$ *definit de f şi* $(a_n)_{n\geq 1}$ *este convergent la* $x \in \mathbb{R}$ *şi avem relaţiile:*

$$\frac{r \cdot a_n \cdot f(a_n)}{2\,a_n + r} \leq x_n - x \leq \frac{r \cdot f(a_n)}{2},\ (\forall)\, n \in \mathbb{N}^* \tag{18}$$

Demonstraţie. Observăm că sunt îndeplinite condiţiile Propoziţiei 1 şi ale Propoziţiei 2. Prin urmare sunt adevărate relaţiile (8) şi (17) de unde rezultă enunţul. Relaţiile (18) sunt echivalente cu:

$$\frac{r \cdot a_n}{2\,a_n + r} \leq \frac{x_n - x}{f(a_n)} \leq \frac{r}{2},\ (\forall) n \in \mathbb{N}^* \tag{19}$$

Dacă în (19) trecem la limită cu $n \to \infty$ şi ţinem seama că $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{r \cdot a_n}{2\,a_n + r} = \dfrac{r}{2}$ deducem că:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x}{f(a_n)} = \frac{r}{2}\ . \tag{20}$$

Vom prezenta în continuare unele aplicaţii ale acestei teoreme, aplicaţii interesante care se obţin prin particularizarea funcţiei f.

A1. Dacă $f:\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = x^{\frac{1-p}{p}}$, cu $p \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ atunci:

$F(x) = p\,\sqrt[p]{x},\ g(x) = x \cdot f(x) = x^{\frac{1}{p}}$ şi prin urmare avem:

$$f'(x) = \frac{1-p}{p} \cdot x^{\frac{1-2p}{p}},\quad f''(x) = \frac{(1-p)(1-2p)}{p^2} \cdot x^{\frac{1-3p}{p}} > 0,\quad (\forall)\, x \in \mathbb{R}_+^*$$

şi

$$g'(x) = \frac{1}{p} \cdot x^{\frac{1-p}{p}},\ g''(x) = \frac{1-p}{p^2} \cdot x^{\frac{1-2p}{p}} < 0,\ (\forall) x \in \mathbb{R}_+^*\ .$$

Prin urmare, f este convexă pe $\mathbb{R}_+^*$, g este concavă pe $\mathbb{R}_+^*$ şi $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$. Considerând $r_n=r, (\forall)\, n\in\mathbb{N}^*$ şi $a_{n+1}=a_n+r, (\forall)\, n\in\mathbb{N}^*$ obţinem şirul Euler-Ioachimescu $(x_n)_{n\geq 1}$ cu $x_n=-p\sqrt[p]{a_n}+r\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt[p]{a_k^{p-1}}}$, şir care este convergent la $x\in\mathbb{R}$. Conform cu (19) avem:

(21) $$\frac{r\cdot a_n}{2a_n+r}\leq\sqrt[p]{a_n^{p-1}}\cdot(x_n-x)\leq\frac{r}{2}, (\forall)n\in\mathbb{N}^*,$$

şi deci conform cu (20) deducem că:

(22) $$\lim_{n\to\infty}(x_n-x)\sqrt[p]{a_n^{p-1}}=\frac{r}{2}.$$

Dacă aici considerăm $a_1=r=1$, atunci $a_n=n$ iar relaţiile (21) şi (22) devin respectiv:

(23) $$\frac{n}{2n+1}\leq(x_n-x)\cdot\sqrt[p]{n^{p-1}}\leq\frac{1}{2}, (\forall)n\in\mathbb{N}^*$$

(24) $$\lim_{n\to\infty}(x_n-x)\sqrt[p]{n^{p-1}}=\frac{1}{2}$$

Relaţiile (29) şi (30) reprezintă rezultatele din [5].

A2. Dacă $a\in(0,1)$, $f:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}_+^*$, $f(x)=x^{-a}$, atunci $F(x)=\frac{1}{1-a}\cdot x^{1-a}$,

$f'(x)=-a\cdot x^{-(1+a)}$, $f''(x)=a(1+a)\cdot x^{-(2+a)}>0$, $(\forall)x\in\mathbb{R}_+^*$.

Să mai observăm că

$g(x)=x\cdot f(x)=x^{1-a}$, $g'(x)=(1-a)x^{-a}$, $g''(x)=-a(1-a)\cdot x^{-(1+a)}<0$, $(\forall)x\in\mathbb{R}_+^*$.

Se observă că sunt îndeplinite condițiile teoremei demonstrate. Prin urmare luând $r_n = r > 0$, $a_{n+1} = a_n + r$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$, deducem că șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ de tip Euler-Ioachimescu definit de f și $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent la $x \in \mathbb{R}$.

Avem deci:

$$x_n = -\frac{1}{1-a} \cdot a_n^{1-a} + r \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_n^a}$$

iar relațiile (19) și (20) devin respectiv:

(25) $$\frac{r \cdot a_n}{2a_n + r} \leq a_n^a (x_n - x) \leq \frac{r}{2},\ (\forall) n \in \mathbb{N}^*,$$

(26) $$\lim_{n\to\infty} a_n^a (x_n - x) = \frac{r}{2},\ (\forall) a \in (0,1).$$

Relațiile (25) și (26), pentru $r = 1$, $a_1 = 1$, reprezintă o corectare a unui rezultat din [3].

A3. Dacă în teorema demonstrată luăm $r_n = r = 1$, $a_{n+1} = a_n + 1$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$ și $a_1 = 1$ obținem toate rezultatele din [1].

A4. Dacă $m \in (1,0)$ și $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = x^{\frac{1-m}{m}}$, $F(x) = m \cdot x^{\frac{1}{x}}$ din teorema demonstrată deducem că șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ de termen general $x_n = -m \cdot n^{\frac{1}{m}} + \sum_{k=1}^{n} k^{\frac{1-m}{m}}$ este convergent. Aceasta este problema C:1525 propusă în Gazeta Matematică 4/1994 de către D.M. Bătinețu-Giurgiu.

Bibliografie

[1] **Andrica Dorin, Tóth László**, Ordinul de convergență al unor şiruri, Astra Matematică, vol.1, nr.3/1990, pag. 3-7

[2] **Bătineţu-Giurgiu Maria, Bătineţu-Giurgiu M.D.**, În legătură cu şirurile constantelor lui Euler şi A.G. Ioachimescu, Gazeta Matematică, 9/1995, pag. 430-441

[3] **Bătineţu-Giurgiu Maria, Bătineţu-Giurgiu M.D.**, Probleme vechi, soluţii şi generalizări noi, Gazeta Matematică, 5/1995, pag. 199-206

[4] **Bătineţu-Giurgiu Maria, Bătineţu-Giurgiu M.D.**, Şiruri de tip Euler-Ioachimescu, Lucrările Seminarului de Creativitate Matematică, Universitatea din Baia Mare, vol. 7, 1997, pag. 9-12

[5] **Berinde Vasile**, Asupra unei probleme a lui A.G.Ioachimescu, Gazeta Matematică 7/1994, pag. 310-313

[6] **Lupaş A.**, A generalization of Hadamard inequalities for convex functions, Univ. Beograd Publ. Elektrotehn. Fak.Mat.Fiz. No.574-576 (1976), 115-121

[7] **Lupaş A.**, The Jensen-Hadamard inequality for convex functions of higher order, Octogon Mathematical Magazine Vol.5, No.2, October 1997, pag.8-9

THE ORDER OF CONVERGENCE OF SOME EULER-IOACHIMESCU TYPE SEQUENCES

Abstract. In this article we establish the order of convergence of some Euler-Ioachimescu type sequences defined in [4].

Primit: 30.05.1998

Colegiul Naţional "Matei Basarab"
Str. Matei Basarab 32
70096 Bucureşti