Lucrările Seminarului de
CREATIVITATE MATEMATICĂ
Vol. 8(1998-1999), 55-56

ASUPRA UNOR PROBLEME DIN GAZETA MATEMATICĂ

Gheorghe BERINDE , Claudiu CHINDRIŞ

Între 26 august şi 10 septembrie 1983 la Câmpulung Moldovenesc s-a desfăşurat Tabăra Naţională de Matematică, unde, la un test a fost propusă spre rezolvare următoarea problemă:

"Fie $x, y, z \in \mathbb{R}^*$. Să se arate că:

$$x^2/y^2 + y^2/z^2 + z^2/x^2 \geq x/y + y/z + z/x$$

şi să se determine când are loc egalitatea".

Dorin Andrica

Enunţul acestei probleme a apărut în Gazeta matematică nr.2 / 1984, la pagina 71, iar la pag.74 se indică o rezolvare greşită.
Acelaşi enunţ şi rezolvare apare şi în [2] la pagina 57, respectiv 258.
În cele ce urmează vom da o rezolvare corectă a acestei probleme şi vom arăta în ce constă greşeala din [1] şi [2]. Ştim că $\forall\ a, b, c \in \mathbb{R}$, avem

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ((a+b+c)/3)^2$$

I. Fie $x, y, z \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow (x/y)^2 + (y/z)^2 + (z/x)^2 \geq 1/3\,(x/y + y/z + z/x)^2 =$

$$= 1/3(x/y+y/z+z/x)(x/y+y/z+z/x) \geq 1/3 \cdot 3\sqrt[3]{x/y \cdot y/z \cdot z/x}(x/y+y/z+z/x) = x/y+y/z+z/x$$

Am aplicat inegalitatea mediilor (pentru cazul $\alpha + \beta + \gamma \geq 3\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}$, dar $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma = 1$)

Deci $(x/y)^2 + (y/z)^2 + (z/x)^2 \geq x/y + y/z + z/x$ pentru cazul $x, y, z \in \mathbb{R}_+$

II Dacă unul din numerele x, y, z este negativ, de exemplu:

$x < 0;\ y > 0;\ z > 0 \Rightarrow (x/y)^2 + (y/z)^2 + (z/x)^2 \geq (-x/y) + y/z + (-z/x) > x/y + y/z + z/x$

(deoarece $-x/y > x/y$ şi $-z/x > z/x$)

III. Dacă două dintre numerele x, y, z sunt negative, de exemplu:

$x < 0$ şi $y < 0 \Rightarrow y/z < 0$ şi $z/x < 0$, se tratează analog cu cazul II.

IV. Dacă toate numerele x,y,z sunt negative ⇒

$x/y > 0$; $y/z > 0$ şi $z/x > 0$, acest caz se reduce la I.

Se observă imediat că egalitatea are loc pentru cazul $x = y = z$.
În [1] şi [2] se indică următoarea **metodă:**

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac \Leftrightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0,\ \forall a,b,c \in \mathbb{R}.$$

Dar dacă luăm $a = x/y$; $b = y/z$ şi $c = z/x \Rightarrow ab = x/y \cdot y/z = x/z$; $bc = y/z \cdot z/x = y/x$

şi $ac = x/y \cdot z/x = z/y$.

În acest caz rezultă $ab + bc + ac = x/z + y/x + z/y \neq x/y + y/z + z/x$

Deci demonstraţia indicată ar fi corectă pentru

$$x^2/y^2 + y^2/z^2 + z^2/x^2 \geq x/z + y/x + z/y$$

şi nu pentru

$$x^2/y^2 + y^2/z^2 + z^2/x^2 \geq x/y + y/z + z/x$$

Bibliografie

[1] Gazeta Matematică, nr.2/1984, pagina 71-74
[2] Probleme de matematică date la Concursurile şi examenele din 1983
autori T. Andreescu, D.Andrica, pag. 57, 258

ON A PROBLEM FROM THE GAZETA MATEMATICĂ

Abstract. In this note we present a correct solution to a problem which was one of the items of a test-exam during the 1983 National Mathematical Camp.

In the mathematical magazine " Gazeta Matematică" was presented an incorrect solution in no. 2 of 1984

Primit: 30. 05. 1999

Liceul " Dragoş Vodă"
Sighetu-Marmaţiei
ROMANIA