Lucrările Seminarului de
CREATIVITATE MATEMATICĂ
Vol. 8(1998-1999), 57-64

FOLOSIREA MONOTONIEI LA REZOLVAREA UNOR ECUAȚII EXPONENȚIALE ȘI LOGARITMICE

Mădălina BERINDE

Vom trata în cele ce urmează două tipuri generale de ecuații exponențiale, respectiv logaritmice printre ale căror cazuri particulare se numără multe probleme propuse la concursuri sau în reviste de matematică. În primul rând, sunt ecuațiile de forma $a^x+b^{\frac{1}{x}}=a^\alpha+b^{\frac{1}{\alpha}}$, unde $a,b\in(1,\infty)$ și $\alpha\in(0,\infty)$ fixate. În al doilea rând, vom aborda ecuațiile de forma $\log_a(1+\sqrt{x})=\log_b x$, unde $a,b\in(1,\infty)$. În rezolvarea celor două tipuri de ecuații, și deci a claselor de probleme derivate, se folosește proprietatea de monotonie a unor funcții definite ca și compuneri de funcții polinomiale, exponențiale și logaritmice.

Se demonstrează simplu, folosind definiția injectivității (respectiv a monotoniei), că următoarea afirmație are loc:

Propoziția 1. *Fie $f:A\to\mathbb{R},(A\subseteq\mathbb{R})$ o funcție injectivă sau monotonă, iar $a\in\mathbb{R}$ constantă. Dacă $x_0\in A$ este o soluție a ecuației $f(x)=a$, atunci x_0 este unica soluție.*

Vom trece acum la rezolvarea celor două tipuri de ecuații precizate mai sus.

I. Ecuații de forma: $a^x+b^{\frac{1}{x}}=a^\alpha+b^{\frac{1}{\alpha}}$ cu $a,b\in(1,\infty)$ și $\alpha\in(0,\infty)$.

Pentru rezolvarea acestui tip de ecuații vom considera funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=a^x+b^{\frac{1}{x}}$, căreia vom încerca să-i determinăm intervalele de monotonie și apoi vom aplica rezultatul menționat în Propoziția 1. În cazul de față constanta cu care egalăm valoarea funcției în punctul x va fi $a^\alpha+b^{\frac{1}{\alpha}}$.

Observăm, mai întâi, că nu are nici un sens să considerăm funcția f pe intervalul $(-\infty,0)$, deoarece în acest caz ecuația $f(x)=a^{\alpha}+b^{\frac{1}{\alpha}}$ nu are soluții. Într-adevăr, din

$$\left.\begin{array}{r} a>1,\, b>1 \\ \alpha>0 \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} a^{\alpha}>1 \\ b^{\frac{1}{\alpha}}>1 \end{array},\ deci\ \ a^{\alpha}+b^{\frac{1}{\alpha}}>2$$

$$\left.\begin{array}{r} a>1,\, b>1 \\ \alpha<0 \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} a^{x}<1 \\ b^{\frac{1}{\alpha}}>1 \end{array},\ deci\ \ a^{x}+b^{\frac{1}{x}}<2$$

rezultă că pentru $x\in(-\infty,0)$ nu putem avea $a^{x}+b^{\frac{1}{x}}=a^{\alpha}+b^{\frac{1}{\alpha}}$.

Vom introduce acum o notație ce va simplifica foarte mult demonstrația noastră. Fie așadar $c=\sqrt{\log_a b}$.

Domeniul de definiție al lui f va fi astfel împărțit în două intervale distincte, $(0,c)$ și $[c,\infty)$. Pe fiecare din aceste intervale vom studia monotonia lui f.

1°. Intervalul (0 , c)

Considerăm $x_1, x_2\in(0,c)$, $x_1<x_2$ și arătăm că $f(x_1)>f(x_2)$.

Inegalitatea de demonstrat se poate scrie echivalent:

$$a^{x_1}+b^{\frac{1}{x_1}}-a^{x_2}-b^{\frac{1}{x_2}}>0 \Leftrightarrow a^{x_1}-a^{x_2}+b^{\frac{1}{x_1}}-b^{\frac{1}{x_2}}>0 \Leftrightarrow a^{x_1}(1-a^{x_2-x_1})+b^{\frac{1}{x_2}}(b^{\frac{x_2-x_1}{x_1x_2}}-1)>0.$$

Avem că $0<x_1<c,\ 0<x_2<c$, de unde prin înmulțire obținem $x_1x_2<c^2$.

Cum, prin notație, $c=\sqrt{\log_a b}$, înseamnă că

$$x_1x_2<\log_a b,\ \text{ adică }\ \frac{1}{x_1x_2}>\log_b a\ .$$

Din ipoteză avem că b >1, deci $b^{\frac{1}{x_1x_2}}>b^{\log_b a} \Leftrightarrow b^{\frac{1}{x_1x_2}}>a$.

Știm că $a>1,\ b>1,\ x_2>0$, respectiv $x_2-x_1>0$ și prin ridicare la puterea

x_1 a inegalității de mai sus obținem

(1) $$b^{\frac{1}{x_2}} > a^{x_1}, \text{ de unde } b^{\frac{1}{x_2}} - a^{x_1} > 0$$

din care apoi, prin ridicarea la puterea $x_2 - x_1$, obținem

(2) $$b^{\frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2}} > a^{x_2 - x_1}$$

Folosind relația (2) în inegalitatea de demonstrat vom obține o inegalitate mai "strânsă":

$$a^{x_1}(1 - a^{x_2 - x_1}) + b^{\frac{1}{x_2}}(b^{\frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2}} - 1) > a^{x_1}(1 - a^{x_2 - x_1}) + b^{\frac{1}{x_2}}(a^{x_2 - x_1} - 1).$$

Ținând seama de ipoteză și de relația (1) rezultă că

$$(a^{x_2 - x_1} - 1)(b^{\frac{1}{x_2}} - a^{x_1}) > 0,$$

ceea ce, în virtutea inegalității de mai sus, arată că și inegalitatea inițială este adevărată și prin urmare, f este strict descrescătoare pe intervalul $(0, c)$.

2⁰. Intervalul [c,∞)

Analog demonstrației anterioare, vom considera două puncte $x_1, x_2 \in [c, \infty)$, $x_1 < x_2$ și vom arăta că $f(x_1) < f(x_2)$.

Inegalitatea de demonstrat va fi acum $a^{x_1}(1 - a^{x_2 - x_1}) + b^{\frac{1}{x_2}}(b^{\frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2}} - 1) < 0$.

Din $0 < c \le x_1; 0 < c \le x_2$ obținem prin înmulțire $c^2 \le x_1 x_2$. Deoarece egalitatea ar avea loc pentru $x_1 = x_2 = c$ și din ipoteză $x_1 < x_2$, rezultă că $c^2 < x_1 x_2$,

de unde (asemănător punctului 1^0) obținem că $b^{\frac{1}{x_1 x_2}} < a$.

Deoarece $a > 1$, $b > 1$, $x_2 > 0$, respectiv $x_2 - x_1 > 0$, prin ridicare la puterea x_1 a inegalității de mai sus obținem

(3) $$b^{\frac{1}{x_2}} < a^{x_1}, \text{ de unde } b^{\frac{1}{x_2}} - a^{x_1} < 0$$

din care, prin ridicarea la puterea $x_2 - x_1$, obținem

(4) $$b^{\frac{x_2-x_1}{x_1x_2}} < a^{x_2-x_1}$$

Folosind acum relația (4) în inegalitatea de demonstrat, vom obține din nou o inegalitate mai "strânsă" decât aceasta:

$$a^{x_1}(1-a^{x_2-x_1}) + b^{\frac{1}{x_2}}(b^{\frac{x_2-x_1}{x_1x_2}}-1) < a^{x_1}(1-a^{x_2-x_1}) + b^{\frac{1}{x_2}}(a^{x_2-x_1}-1)$$

şi cum, de această dată avem $(a^{x_2-x_1}-1)(b^{\frac{1}{x_2}}-a^{x_1}) < 0$,

inegalitate evident adevărată, ținînd seama de ipoteză şi de relația (3), rezultă că şi inegalitatea inițială are loc, prin urmare funcția f este strict crescătoare pe intervalul $[c,\infty)$.

Am demonstrat aşadar că funcția considerată este strict descrescătoare pe $(0, c)$ şi strict crescătoare pe $[c,\infty)$.

Ne rămâne să găsim câte o soluție a ecuației $f(x) = a^{\alpha} + b^{\frac{1}{\alpha}}$ pe fiecare interval, soluție care, conform Propoziției 1, va fi unică pe intervalul respectiv.

Se observă uşor că $x' = \alpha$ este o soluție a ecuației $a^x + b^{\frac{1}{x}} = a^{\alpha} + b^{\frac{1}{\alpha}}$

De asemenea se observă (mai puțin uşor) că şi $x'' = \frac{1}{\alpha}\log_a b$ este o soluție a

ecuației $a^x + b^{\frac{1}{x}} = a^{\alpha} + b^{\frac{1}{\alpha}}$, deoarece $a^{\frac{1}{\alpha}\log_a b} + b^{\frac{1}{\frac{1}{\alpha}\log_a b}} = b^{\frac{1}{\alpha}} + b^{\alpha\log_b a} = a^{\alpha} + b^{\frac{1}{\alpha}}$.

Facem acum următoarea precizare: α şi $\frac{1}{\alpha}\log_a b$ nu sunt niciodată de aceeaşi parte a lui c pe axa reală deoarece:

(1^0) $\alpha \in (0,c) \Rightarrow \alpha < c \Rightarrow \frac{1}{\alpha} > \frac{1}{c} \Rightarrow \frac{1}{\alpha}\log_a b > \frac{1}{c}\log_a b \Rightarrow \frac{1}{\alpha}\log_a b > \frac{1}{c}\cdot c^2 \Rightarrow \frac{1}{\alpha}\log_a b > c > \alpha$

(2^0) $\alpha \in [c,\infty) \Rightarrow \alpha \geq c \Rightarrow \frac{1}{\alpha} \leq \frac{1}{c} \Rightarrow \frac{1}{\alpha}\log_a b \leq \frac{1}{c}\log_a b \Rightarrow \frac{1}{\alpha}\log_a b \leq \frac{1}{c}\cdot c^2 \Rightarrow \frac{1}{\alpha}\log_a b \leq c \leq \alpha$

Vom avea astfel două situații:

a) $\alpha \in (0, c)$ când

$x' = \alpha$ este rădăcină a ecuației $a^x + b^{\frac{1}{x}} = a^\alpha + b^{\frac{1}{\alpha}}$ pe intervalul (0, c) iar

$x'' = \frac{1}{\alpha}\log_a b$ este rădăcină a ecuației pe intervalul $[c, \infty)$;

b) $\alpha \in (c, \infty)$ când

$x' = \alpha$ este o rădăcină a ecuației pe intervalul $[c, \infty)$ iar

$x'' = \frac{1}{\alpha}\log_a b$ este rădăcină a ecuației pe intervalul (0, c) .

Ținând seama de Propoziția 1, fiecare din rădăcinile precizate mai sus este unică pe intervalul respectiv. Prin urmare, am demonstrat:

Propoziția 2. *Ecuația* $a^x + b^{\frac{1}{x}} = a^\alpha + b^{\frac{1}{\alpha}}$ *, unde* $a, b > 1, \alpha > 0,$

admite pe $\mathbb{R}^*$ *două soluții reale,* $x_0 = \alpha$ *, respectiv* $x_0' = \frac{1}{\alpha}\log_a b.$

Observație. În cazul în care $\alpha = \sqrt{\log_a b}$, ecuația va avea o singură soluție și anume $x_0 = \sqrt{\log_a b} = x_0'$.

Exemplul 1. Fie $a > 1, b > 1, c = \sqrt{\log_a b}$. Să se arate că funcția

$f : [c, \infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = a^x + b^{\frac{1}{x}}$ este strict crescătoare

și apoi să se rezolve ecuația $x + 16^{\log_x 2} = 18\ (x > 0,\ x \neq 1)$.

([5], Nr. 4/1995, Problema C:1665, V. Nicula)

Soluție. Pentru rezolvare, vom rescrie ecuația dată sub forma

$2^{\log_2 x} + 16^{\log_x 2} = 2 + 16$ și vom face notațiile $a = 2, b = 16, x' = \log_2 x$, $\alpha = 1$.

Cu acestea, ecuația se scrie $a^{x'} + b^{\frac{1}{x'}} = a^\alpha + b^{\frac{1}{\alpha}}$ (unde evident $a, b > 1, \alpha > 0$).

Aplicând acum rezultatul menționat în Propoziția 2, pe intervalul $(0,\infty)$, vom obține soluțiile

$x'=1$, *de unde* $x=2$, și respectiv $x'=\sqrt{\log_a b}$, *adică* $x'=4$, *de unde* $x=16$.

Exemplul 2. Să se rezolve în $\mathbb{R}^*$ ecuația $2^x+2^{\frac{6}{x}}=12$.

([5], Nr. 8/1994, pag.369, Marcel Chiriță)

Exemplul 3. Rezolvați în $\mathbb{R}^*$ ecuația $a^x+b^{\frac{1}{x}}=a+b$, unde $a,b\in(1,\infty)$.

([3], pag. 56, Dan Popescu)

Exemplul 4. Să se rezolve în $\mathbb{R}^*$ ecuația $3^x+4^{\frac{1}{x}}=11$.

([5], Nr. 2/1998, Pr. C:2011, Cristinel Mortici)

Observație. Un mare număr de probleme propuse la diverse concursuri se încadrează într-un caz particular al ecuației de mai sus, și anume când $a=b$, ecuația fiind în acest caz

$$a^x+a^{\frac{1}{x}}=a^\alpha+a^{\frac{1}{\alpha}}, \text{ cu } a>1,\ \alpha>0.$$

Exemplul 5. Să se rezolve în $\mathbb{R}^*$ ecuațiile : a) $9^x+9^{\frac{1}{x}}=18$; b) $9^x+9^{\frac{1}{x}}=84$.

([5], Nr. 6/1992, pag. 218, Gh. Andrei și C-tin Caragea)

Soluție. a) Considerând $a=9$ și $\alpha=1$, se obține imediat soluția $x_1=x_2=1$.

b) Considerând acum $a=9$ și $\alpha=2$, se obțin soluțiile $x_1=2$, $x_2=1/2$.

Exemplul 6. Să se rezolve în $\mathbb{R}^*$ ecuația $4^x+4^{\frac{1}{x}}=18$.

([1], pag. 37, Pr. 169, Gh. Andrei și C-tin Caragea)

Exemplul 7. Să se rezolve în $\mathbb{R}^*$ ecuația $8^x+8^{\frac{1}{x}}=514$.

Observație. Înlocuind b cu b^α în ecuația tratată în această lucrare, se obține ecuația $a^x+b^{\frac{\alpha}{x}}=a^\alpha+b$, abordată în [4] cu alte mijloace și echivalentă cu cea tratată de noi, ecuație ce apare și în problema 24085, G.M. 3/ 1999, semnată de acelaşi autor.

II. Ecuaţii de forma $\log_a(1+\sqrt{x})=\log_b x$, cu $a,b>1$, $b<a^2$:

Pentru a putea aplica rezultatul Propoziţiei 1 în cazul acestei ecuaţii, vom considera următoarea funcţie (sugerată de rezolvarea unui caz particular ce urmează a fi menţionat):

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(t)=\left(\frac{1}{a}\right)^t+\left(\frac{\sqrt{b}}{a}\right)^t$ unde a şi b sunt cele din ecuaţia de mai sus şi, prin

notaţie $t=\log_b x$. Dacă $t=\log_b x$, înseamnă că $x=b^t$, deci $\sqrt{x}=b^{\frac{t}{2}}$ (*)

Din ecuaţia iniţială vom avea $\log_a(1+\sqrt{x})=t$, adică $a^t=1+\sqrt{x}$.

Folosind (*), putem scrie mai departe $a^t=1+b^{\frac{t}{2}}$, de unde prin împărţire cu a^t

obţinem: $\left(\frac{1}{a}\right)^t+\left(\frac{\sqrt{b}}{a}\right)^t=1$, adică $f(t)=1$, $\forall t\in\mathbb{R}$, unde $t=\log_b x$ ($b>1$, $x>0$)

Cum $a>1$, $b>1$, $b<a^2$ înseamnă că $\frac{1}{a}<1$, $\frac{\sqrt{b}}{a}<1$, deci f este descrescătoare (ca sumă de funcţii exponenţiale cu baza mai mică decât 1).

Prin urmare, conform Propoziţiei 1, ecuaţia $\log_a(1+\sqrt{x})=\log_b x$ va avea întotdeauna soluţie reală unică. Analog se tratează ecuaţia mai generală

$\log_a(1+\sqrt[n]{x})=\log_b x$, cu $a,b>1$, $b<a^n$, $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$.

Un caz particular mai interesant se obţine pentru $b=a+1$ şi $n=2$.

Ecuaţia va fi în acest caz: $\log_a(1+\sqrt{x})=\log_{a+1}x$, cu $a>1$, $a\in\mathbb{R}$.

Dând valori lui a, obţinem o infinitate de ecuaţii cu soluţie unică.

Exemplul 8. Să se rezolve ecuaţia: $\log_2(1+\sqrt{x})=\log_3 x$.

(Olimpiada judeţeană Maramureş, 1987)

Soluţie. Analog modului în care am rezolvat ecuaţia în general, notăm

$t=\log_3 x$ şi vom obţine $\left(\frac{1}{2}\right)^t+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^t=1$, ecuaţie cu soluţia unică $t=2$, de unde $x=9$.

Exemplul 9. Să se rezolve ecuaţia $\log_3(1+\sqrt{x})=\log_4 x$.

Soluţie. Luăm $a=3$ şi se obţine soluţia unică $x=4$.

Lăsăm cititorului plăcerea de a găsi şi alte ecuaţii ce se încadrează în acest tip.

Bibliografie

[1] **Andrei Gh., Caragea, C., Cucurezeanu I., Bordea Gh.,** Probleme de algebră pentru concursurile de admitere şi olimpiadele şcolare, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1993

[2] **Berinde, Mădălina,** Ecuaţii exponenţiale şi logaritmice cu soluţie unică, Ziua Liceului "Vasile Lucaciu", Baia Mare, 24 ianuarie 1997

[3] **Brânzei, D., Chebici, I., Chirciu, M., Chirciu, N.,** Matematica în concursurile şcolare. Clasele IX-XII, Editura Paralela 45, Piteşti, 1997

[4] **Popescu , Dan,** Asupra unei ecuaţii exponenţiale, Revista de matematică din Craiova-Cardinal, Anul X, nr.1 (1999/2000), pag. 3-4

[5] *** **Gazeta Matematică, 1990-1999**

USING THE MONOTONICITY IN SOLVING SOME EXPONENTIAL AND LOGARITHMIC EQUATIONS

Abstract. In this paper two classes of exponential and logarithmic equations, respectively, are solved by means of the monotonicity of the involved functions :

1°. $a^x+b^{\frac{1}{x}}=a^{\alpha}+b^{\frac{1}{\alpha}}$, where $a, b\in(1,\infty)$ and $\alpha>0$;

2°. $\log_a(1+\sqrt[n]{x})=\log_b x$, where $a, b\in(1,\infty)$, $a<b^n$, $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$.

Primit:30.11.1999

Facultatea de Matematică şi Informatică
Universitatea "Babeş-Bolyai"
Str. M.Kogălniceanu, nr. 1
3400 Cluj-Napoca, ROMANIA