Lucrările Seminarului de
CREATIVITATE MATEMATICĂ
Vol. 8(1998-1999), 65 - 74

CÂTEVA PROPRIETĂŢI ALE UNEI FUNCŢII EXPRIMATĂ PRINTR-O INTEGRALĂ DEFINITĂ

Vasile BERINDE

Subiectul III propus la Concursul pentru ocuparea posturilor didactice vacante în învăţământul preuniversitar din 16 iulie 1999 (profesori I), a avut următorul enunţ:

P1. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\int_x^{2x}\frac{1}{\sqrt{t^4+t^2+1}}\,dt$

a) Arătaţi că f admite o primitivă pară pe $\mathbb{R}$;

b) Demonstraţi că şirul $(f(n))_{n\geq 1}$ este convergent;

c) Determinaţi punctele de extrem ale lui f şi arătaţi că

$$|f(x)|\leq\sqrt{\frac{2}{7}},\quad \text{pentru orice}\quad x\in\mathbb{R};$$

d) Verificaţi că $|f(x)-f(y)|\leq 9|x-y|$, pentru orice $x,y\in[-1,1]$.

Având în vedere faptul că problema a pus în dificultate pe marea majoritate a candidaţilor, în nota de faţă vom da o rezolvare completă a acesteia, vom indica câteva generalizări ale ei şi vom evidenţia şi alte proprietăţi interesante ale funcţiei f din enunţul problemei.

Rezolvarea problemei P1. a) Funcţia $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(t)=\frac{1}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$, $t\in\mathbb{R}$,

este continuă pe $\mathbb{R}$ şi deci admite primitive pe $\mathbb{R}$ şi este integrabilă pe orice interval mărginit din $\mathbb{R}$.

Fie G o primitivă a sa. Atunci, aplicând formula Leibnitz-Newton obţinem:

$$f(x)=G(2x)-G(x),\quad\forall\, x\in\mathbb{R}\tag{*}$$

şi cum G este continuă pe $\mathbb{R}$ (G este chiar derivabilă, cu $G'(x)=g(x)$ pe $\mathbb{R}$), deducem că şi f este continuă pe $\mathbb{R}$ şi deci admite primitive pe $\mathbb{R}$. Făcând schimbarea de variabile $t = -u$, rezultă că

$$f(-x) = \int_{-x}^{-2x} g(t)\,dt = -\int_{x}^{2x} g(u)\,du = -f(x),$$

care arată că f este o funcţie impară.
Funcţia f nu poate avea primitive impare căci dacă F ar fi o astfel de primitivă, adică am avea

$$F(-x) = -F(x) \qquad (1)$$

atunci, prin derivare în (1) ar rezulta că f este pară, căci

$$-F'(-x) = -F'(x) \Leftrightarrow f(-x) = f(x).$$

Aşadar, dacă F este o primitivă a lui f, atunci F nu poate fi impară. Fie F_1 o primitivă oarecare a lui f. Atunci funcţia F dată prin

$$F(x) = \frac{1}{2}[F_1(x) + F_1(-x)],\ x \in \mathbb{R} \qquad (2)$$

este o primitivă pară a lui f căci, din (2) rezultă

$$F'(x) = \frac{1}{2}\left[F_1'(x) - F_1'(-x)\right] = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)] = f(x)$$

şi $F(-x) = F(x)$. De fapt, **toate** primitivele unei funcţii impare sunt funcţii pare.
Într-adevăr, dacă F este o primitivă pară, atunci orice altă primitivă a lui f este de forma $G = F + C$ $(C = const)$, care este întotdeauna o funcţie pară.

b) Din inegalităţile evidente

$$t^4 \le t^4 + t^2 + 1 \le t^4 + 2t^2 + 1$$

rezultă că
$$\frac{1}{t^2+1} \le \frac{1}{\sqrt{t^4+t^2+1}} \le \frac{1}{t^2},\quad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

şi atunci, pentru orice $x>0$, integrala este monotonă pe intervalul $[x,2x]$, adică

$$\int_{x}^{2x} \frac{dt}{t^2+1} \le f(x) \le \int_{x}^{2x} \frac{dt}{t^2} \qquad (2)$$

din care obţinem, pentru orice $x > 0$,

$$\operatorname{arc}tg\, 2x - \operatorname{arc}tg\, x \leq f(x) \leq \frac{1}{2x} \tag{3}$$

Trecem la limită în inegalitatea precedentă şi cum

$$\lim_{x\to\infty} \operatorname{arc}tg\, x = \lim_{x\to\infty} \operatorname{arc}tg\, 2x = \frac{\pi}{2},$$

folosind criteriul cleştelui, rezultă

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0\ . \tag{4}$$

În particular, pentru $x = n \in \mathbb{N}$, obţinem $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = 0$, deci şirul $(f(n))_{n\geq 1}$ este convergent.

Observaţii. 1) De remarcat că avem şi

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0\ , \tag{4'}$$

numai că monotonia integralei va fi valabilă pe intervalul $[2x, x]$, întrucât în acest caz $x<0$ şi, în loc de (2) vom avea

$$\int_{2x}^{x} \frac{dt}{t^2+1} \leq \int_{2x}^{x} \frac{1}{\sqrt{t^4+t^2+1}} \leq \int_{2x}^{x} \frac{dt}{t^2}$$

adică

$$\operatorname{arc}tg\, x - \operatorname{arc}tg\, 2x \leq -f(x) \leq \frac{1}{2x} - \frac{1}{x}$$

care conduce la inegalitatea

$$\frac{1}{2x} \leq f(x) \leq \operatorname{arc}tg\, 2x - \operatorname{arc}tg\, x \tag{3'}$$

Inegalitatea (3') se putea obţine şi direct din (3), punând $x := -x$ şi folosind faptul că f este impară.

2) Putem calcula $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)$ cu ajutorul teoremei de medie pentru integrala definită. Deoarece g este continuă, $\exists\, c_n \in [n, 2n]$ astfel încât

$$f(n) = \int_n^{2n} g(t)\,dt = g(c_n)\cdot(2n-n)$$

şi atunci este nevoie să demonstrăm că

$$\lim_{n\to\infty} n\,g(c_n) = 0 \tag{5}$$

Într-adevăr, deoarece $g'(t) < 0$, $\forall\ t > 0$, rezultă că g este strict descrescătoare pe $(0,\infty)$, adică $g(2n) \le g(t) \le g(n)$, pentru orice $t \in [n, 2n]$, $n \ge 1$. Din inegalitatea precedentă deducem că

$$\frac{n}{\sqrt{(2n)^4+(2n)^2+1}} \le n\cdot g(c_n) \le \frac{n}{\sqrt{n^4+n^2+1}}\ ,\ \forall\ n \in \mathbb{N}^*$$

din care rezultă, trecând la limită şi folosind criteriul cleştelui, tocmai relaţia cerută (5).

3) Se poate arăta că şirul $(f(n))_{n\ge 1}$ este convergent, fără a-i calcula limita.

În primul rând, deoarece $g(t) > 0$, $\forall\ t \in \mathbb{R}$, rezultă, pe baza monotoniei integralei, că

$$f(n) = \int_n^{2n} g(t)\,dt \ge 0\ ,\ \ \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

Pe de altă parte, cu schimbarea $t = xu$ în integrala care defineşte funcţia f, vom obţine

$$f(x) = \int_1^2 \frac{x\,du}{\sqrt{(xu)^4+(xu)^2+1}}$$

şi atunci

$$f(n+1) - f(n) = \int_1^2 [h_{n+1}(t) - h_n(t)]\,dt\ , \tag{6}$$

unde am notat

$$h_x(t) = \frac{x}{\sqrt{(xt)^4 + (xt)^2 + 1}}$$

Prin aducere la acelaşi numitor şi raţionalizarea numărătorului obţinem că

$$h_{n+1}(t) - h_n(t) = \frac{(2n+1)\,[1 + n(n+1)t^2]\,[1 - n(n+1)t^2]}{A},$$

cu $A > 0$, de unde rezultă că, pentru orice $t \in [n, n+1]$, avem

$$h_{n+1}(t) - h_n(t) < 0$$

care, pe baza relaţiei (6), arată că şirul $(f(n))$ este un şir descrescător. Cum termenii săi sunt pozitivi, deducem că şirul este convergent.

Trecem acum la rezolvarea punctului c) al problemei.

Din relaţia (*) rezultă că f este derivabilă şi

$$f'(x) = [G(2x)]' - [G(x)]' = 2G'(2x) - G'(x) = 2g(2x) - g(x) \qquad (7)$$

ceea ce ne dă, după efectuarea calculelor, că

$$sgn\, f'(x) = sgn\,(1 - 2x^2)$$

Folosind relaţiile (4) şi (4') obţinem tabloul de variaţie

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
$f'(x)$	- - - - - - - - - - -		0	+ + + + + +	0	- - - - - - -	
$f(x)$	0	↘	m	↗	M	↘	0

în care $m = f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -M$ (f este impară!).

Pe baza teoremei de medie, pentru orice $x \neq 0$, obţinem că

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{t_x^4+t_x^2+1}}\ ,\quad \text{unde}\quad t_x\in[x\,,2x]$$

care ne arată, pe de o parte, că $f(x)\neq 0$, $\forall\ x\in\mathbb{R}^*$, iar, pe de altă parte, că

$$sgn\ f(x)=sgn\ x$$

şi deci, pentru orice $x\in\mathbb{R}$ avem

$$|\ f(x)\ |\leq M \tag{8}$$

Dar

$$M=f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\sqrt{2}}\frac{dt}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$$

şi cum g(t) este descrescătoare, deducem că

$$g(t)=\frac{1}{\sqrt{t^4+t^2+1}}\leq g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{2}{\sqrt{7}}\ ,$$

inegalitate care prin integrare ne dă

$$M=f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\sqrt{2}}g(t)\,dt\leq\frac{2}{\sqrt{7}}\cdot\left(\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

adică

$$M\leq\sqrt{\frac{2}{7}}\ ,$$

ceea ce, pe baza relaţiei (8), demonstrează inegalitatea din enunţ.

d) Având în vedere faptul că f satisface condiţiile teoremei lui Lagrange pe orice interval $[x\,,y]\subset\mathbb{R}$, avem

$$f(x)-f(y)=f'(c)\cdot(x-y)\ ,\ c\in(x\,,y)$$

de unde

$$|\ f(x)-f(y)\ |=|\ f'(c)\ |\cdot|\ x-y\ |\ ,\ x,y\in\mathbb{R},\ c\in(x,y)\ . \tag{9}$$

Din (7) rezultă că

$$| f'(c) | = | 2g(2c) - g(c) | \le | 2g(2c) | + | g(c) | = 2g(2c) + g(c),$$

căci g este pozitivă. Deoarece $g(t) \le 1$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$, din relația precedentă obținem că

$$| f'(c) | \le 3$$

care împreună cu (9) demonstrează condiția Lipschitz

$$| f(x) - f(y) | \le 3 \cdot | x - y |,$$

mult mai tare decât cea cerută de problemă și care, în plus, este adevărată pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ (și nu doar pentru x, y din intervalul [-1,1]).

Problema este acum complet rezolvată.

Observații. 1) Recomandăm cititorului să abordeze singur problemele de același tip care se obțin definind funcția f prin:

P2. $$f(x) = \int_{kx}^{(k+1)x} \frac{1}{\sqrt{t^4 + t^2 + 1}}\, dt, \quad x \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N}^*;$$

P3. $$f(x) = \int_{x}^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^4 + at^2 + 1}}\, dt, \quad x \in \mathbb{R},\ a \in (0,2);$$

P4. $$f(x) = \int_{kx}^{(k+1)x} \frac{1}{\sqrt{t^4 + at^2 + 1}}\, dt, \quad x \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N}^*,\ a \in (0,2).$$

2) Recomandăm de asemenea cititorului să abordeze și alte aspecte legate de problema P1 (preluate din enunțul problemei 6, pag.167 din [4], autor Dan Radu) sau din enunțul problemei 176, pag.267 din [2]);

e) Să se calculeze (media Cesaro a funcției f):

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\,dt; \qquad (10)$$

f) Arătați că f este derivabilă și aflați f';

g) Demonstrați că restricțiile $f_1 : (-\infty, -1/\sqrt{2}) \to (-M, 0)$;

$f_2:(-1/\sqrt{2},\ 1/\sqrt{2}) \to (-M, M)$; $\quad f_3:(-1/\sqrt{2},\ +\infty) \to (0, M)$ ale lui f sunt bijective şi inversele lor sunt derivabile. Indicăm pe scurt modul de rezolvare al cerinţelor e)-g), prima cerinţă preluată din [4], a doua din [2] iar cerinţa g) propusă de autorul acestei note.

e) Pentru a obţine (10), vom integra dubla inegalitate (3) pe intervalul $[0, x]$, vom arăta că

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\int_0^x (\operatorname{arc}tg\ 2t - \operatorname{arc}tg\ t)\, dt = 0\ ,$$

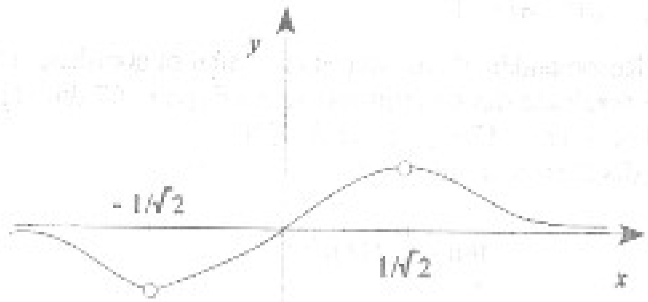
$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\int_0^x \frac{dt}{2t} = 0$$

şi apoi vom aplica criteriul cleştelui.

f) Derivabilitatea rezultă din (*), căci funcţiile G şi $l(x) = 2x$ sunt derivabile. Avem

$$f'(x) = \frac{2}{\sqrt{(2x)^4 + (2x)^2 + 1}} - \frac{1}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}}\ , \quad x \in \mathbb{R}$$

g) Tabelul de variaţie întocmit la rezolvarea punctului c) arată că f_1, f_2, f_3 sunt strict monotone, ceea ce rezultă din graficul lui f, dat în figura alăturată



Pe de altă parte, f este continuă pe $\mathbb{R}$ şi cum orice funcţie continuă şi strict monotonă

pe un interval este inversabilă, prima parte este demonstrată.
Pentru ultima parte, folosim formula (vezi [3], spre exemplu)

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}, \quad \text{unde} \quad y = f(x),$$

şi faptul că $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$, ceea ce încheie rezolvarea.

Rezumăm, în încheiere, principalele proprietăţi ale funcţiei f din problema P1 (şi din P2, P3 şi P4, enunţate de noi în această lucrare):

- f este derivabilă pe $\mathbb{R}$;
- toate primitivele lui f sunt pare pe $\mathbb{R}$;
- f este mărginită pe $\mathbb{R}$;
- f este lipschitziană pe $\mathbb{R}$, cu constanta Lipschitz 3 (şi prin urmare f este uniform continuă);
- f are media Cesaro egală cu zero;
- restricţiile f_1, f_2, f_3 ale lui f sunt bijective şi inversele lor sunt derivabile.

3) Urmărind rezolvarea problemei vom remarca desigur complexitatea acesteia, dar mai ales nivelul său de dificultate. Apreciem că ea a fost nemiloasă (ca şi celelalte probleme propuse la acest concurs) şi credem că propunătorul acesteia a urmărit cel puţin două lucruri:
a) să le arate candidaţilor înscrişi la concurs că mai au multe de învăţat înainte de a primi dreptul să-i înveţe pe alţii matematica în calitate de titulari;
b) să uşureze munca celor care fac corectura.
Rezultatele din această notă pot fi formulate şi în cazul general al unei funcţii $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} g(t)\, dt$, unde g, h_1 şi h_2 au proprietăţi corespunzătoare, misiune pe care o lăsăm în seama cititorului.

Bibliografie

1. **ARSINTE, V.**, Probleme elementare de calcul integral, Editura Universității București, 1995
2. **CATANĂ, Au., CATANĂ,Al.**, Probleme de analiză matematică și observații metodologice, Editura Didactică și Pedagogică, 1993
3. **NICOLESCU, L., DINCULEANU, N., MARCUS, S.**, Analiză matematică, vol.I, Editura Didactică și Pedagogică, 1971 (ed. a III-a)
4. **TOMESCU, I. (coord)**, Probleme date la olimpiadele de matematică pentru licee (1950-1990), Editura Științifică, 1992
5. **DUCA, D. I., DUCA, E.**, Analiză matematică, Culegere de probleme, GIL Educațional,1999

REMARKS ON THE PROPERTIES OF A FUNCTION EXPRESSED BY MEANS OF A DEFINITE INTEGRAL

Abstract. The paper is devoted to the solution of the problem P1:

Let $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ be given by $f(x)=\int_x^{2x}\frac{1}{\sqrt{t^4+t^2+1}}\,dt$.

a) Show that f does possess an even primitive on $\mathbb{R}$;

b) Prove that the sequence $\{f(n)\}_{n\geq 1}$ is convergent;

c) Find the extreme values of f and show that $|f(x)|\leq\sqrt{\frac{2}{7}}$, for each $x\in\mathbb{R}$;

d) Check that $|f(x)-f(y)|\leq 9\cdot|x-y|$, for each $x,y\in[-1,1]$.

At the same time, we point out that **all** primitives of f are even and that the Lipschitz constant may be improved to 3 instead of 9. The Lipschitz condition itself is valid for each $x,y\in\mathbb{R}$ and not only for $x,y\in[-1,1]$ as required in the original problem.

We also show in this note that the Césaro mean value of f is zero.

All these properties are preserved when f is of a more general form, as given in P2, P3 and P4.

Primit 01.09.1999

Universitatea de Nord Baia Mare
Facultatea de Științe
Catedra de matematică și Informatică
Victoriei 76, 4800 Baia Mare, ROMANIA
E-mail:vberinde@univer.ubm.ro