Lucrările Seminarului de
CREATIVITATE MATEMATICĂ
Vol. 8(1998-1999), 97-102

ASUPRA UNEI PROBLEME DE OLIMPIADĂ

Dana HEUBERGER, Nicolae MUŞUROIA

În acest articol vom utiliza numerele complexe pentru a obţine relaţii referitoare la distanţele de la vârfuri la principalele puncte remarcabile ale unui triunghi oarecare:

H- ortocentrul;

G- centrul de greutate;

E- centrul cercului lui Euler.

Ideea acestui articol ne-a fost dată de Problema 0.841 din G.M. 1/1997, al cărui enunţ este:

" *Fie* a, b, c *afixele vârfurilor triunghiului* ABC *astfel încât* $\sum |-a+b+c| > 6$. *Să se arate că* ΔABC *este obtuzunghic*"

Aşa cum se poate constata uşor, relaţia dată în ipoteză este imposibilă: ori s-a omis condiţia că ΔABC este înscris în cercul unitate, ori o greşeală de tipar face să lipsească factorul R, raza cercului circumscris, din membrul drept. Într-adevăr, dacă de exemplu ΔABC este echilateral, cu $a = 2$, $b = -1 + i\sqrt{3}$, $c = -1 - i\sqrt{3}$, atunci $\sum |-a+b+c| = 1 \neq 6$, ceea ce contrazice enunţul.

În cele ce urmează, considerăm, în planul complex, un ΔABC **al cărui centru al cercului circumscris este originea planului**.
Notațiile fiind cele cunoscute, amintim că:

-afixul h al ortocentrului H este $h=a+b+c$;

- afixul g al centrului de greutate G este $g=\frac{a+b+c}{3}$;

-afixul e al centrului cercului lui Euler E este $e=\frac{a+b+c}{2}$.

Vom demonstra următoarele:

Propoziția 1. *Dacă a,b,c sunt afixele vârfurilor ΔABC atunci* $\sum |a+b| \le 3R$

(Problema 23665, GM 1/1997)

Demonstrație.

$\sum |a+b| = \sum |a+b+c-c| = \sum HC = 2R(\cos A+\cos B+\cos C) \le 3R$,

egalitatea având loc pentru triunghiul echilateral.

Propoziția 2. Dacă a,b,c sunt afixele vârfurilor ΔABC și $\sum |b+c-2a| \ge 9R$, atunci ΔABC este echilateral

Demonstrație. $\sum |b+c-2a| = 3\sum \left|\frac{b+c-2a}{3}\right| = 3\sum \left|\frac{a+b+c}{3}-a\right| = 3\sum GA$

și deci inegalitatea din ipoteză devine $\sum GA \ge 3R$. Este cunoscută însă inegalitatea $\sum GA^2 \le 3R^2$ (cu egalitatea pentru triunghi echilateral). Aplicând inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwarz obținem:

$$(GA\cdot 1+GB\cdot 1+GC\cdot 1)^2 \le (GA^2+GB^2+GC^2)\cdot 3 \le 9R^2$$

și deci pentru orice ΔABC avem $\sum GA \le 3R$. Ținând cont de relația din ipoteză obţinem că $\sum GA = 3R$ şi $\sum GA^2 = 3R^2$ şi în consecinţă ΔABC este echilateral.

Propoziţia 3. În orice ΔABC, $EA^2 = \dfrac{R^2+AB^2+AC^2-BC^2}{4}$

Demonstraţie.

$$EA^2 = |e-a|^2 = (e-a)(\overline{e}-\overline{a}) = \frac{b+c-a}{2}\cdot\frac{\overline{b}+\overline{c}-\overline{a}}{2} =$$

$$= \frac{3R^2+(b\overline{c}+\overline{b}c)-(b\overline{a}+\overline{b}a)-(c\overline{a}+\overline{c}a)}{4}$$

Dar $BC^2 = (b-c)(\overline{b}-\overline{c}) = 2R^2-(\overline{b}c+b\overline{c})$, deci $\overline{b}c+b\overline{c} = 2R^2-BC^2$ şi în mod analog $b\overline{a}+\overline{b}a = 2R^2-AB^2$ şi $c\overline{a}+\overline{c}a = 2R^2-AC^2$.

Atunci:

$$EA^2 = \frac{3R^2+(2R^2-RC^2)-(2R^2-AB^2)-(2R^2-AC^2)}{4}$$

şi deci

$$EA^2 = \frac{R^2+AB^2+AC^2-BC^2}{4}$$

Consecinţă. În orice ΔABC, $\sum EA^2 = \dfrac{3R^2+AB^2+AC^2+BC^2}{4}$.

Propoziţia 4. În orice ΔABC, $\sum EA^2 \le 3R^2$

Demonstraţie.

$$3R^2+AB^2+AC^2+BC^2 \le 12R^2 \Leftrightarrow AB^2+AC^2+BC^2 \le 9R^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C \le \frac{9}{4} \Leftrightarrow 2(1+\cos A\cos B\cos C) \le \frac{9}{4} \Leftrightarrow \cos A\cos B\cos C \le \frac{1}{8}.$$

Ultima relaţie fiind o inegalitate cunoscută, adevărată pentru orice ΔABC (cu egalitate pentru triunghiul echilateral), rezultă că şi relaţia din enunţ este adevărată.

Consecinţa 1. Fie $\Delta\, ABC$. Atunci:

$$\sum EA^2 = 3R^2 \Leftrightarrow \Delta\, ABC \text{ este echilateral}$$

Consecinţă 2. În orice $\Delta\, ABC$ are loc $\sum EA \le 3R$, cu egalitate pentru triunghiul echilateral

Demonstraţie.
Aplicând inegalitatea Cauchy- Buniakovski-Schwarz, avem:
$(EA\cdot 1 + EB\cdot 1 + EC\cdot 1)^2 \le (EA^2 + EB^2 + EC^2)\cdot 3 \le 9R^2$ şi deci $\sum EA \le 3R$.

Propoziţia 5. Dacă a,b,c sunt afixele vârfurilor $\Delta\, ABC$, atunci

$$\sum |-a+b+c| \le 6R$$

Demonstraţie.

$$|-a+b+c| = |a+b+c-2a| = 2\left|\frac{a+b+c}{2}-a\right| = 2\,|e-a| = 2EA$$

şi ţinând cont de consecinţa anterioară obţinem:

$$\sum |-a+b+c| = 2\,(EA + EB + EC) \le 6R\ .$$

Propoziţia 6. În orice $\Delta\, ABC$, $II_a + II_b + II_c \le 6R$, unde I este centrul cercului înscris în $\Delta\, ABC$ şi I_a, I_b, I_c sunt centrele cercurilor exînscrise corespunzătoare laturilor a,b,c.

Demonstraţie. Centrul I al cercului înscris în $\Delta\, ABC$ este ortocentrul $_\Delta I_aI_bI_c$ şi deci $II_a + II_b + II_c = 2R_1(\cos I_a + \cos I_b + \cos I_c) \le 3R_1$ unde R_1 este raza cercului circumscris $_\Delta I_aI_bI_c$. Dar cum cercul circumscris $\Delta\, ABC$ este cercul lui Euler pentru $_\Delta I_aI_bI_c$, avem că $R_1 = 2R$.

Obținem așadar $II_a + II_b + II_c \le 3R_1 = 6R$.

Aplicații.

1. În orice ΔABC are loc $II_a \cdot EA + II_b \cdot EB + II_c \cdot EC \le 6R^2$

Demonstrație. Fie $a \le b \le c$.

Cum $II_a = 2R_1 \cos\frac{B+C}{2} = 4R\sin\frac{A}{2}$, $II_b = 4R\sin\frac{B}{2}$ și $II_c = 4R\sin\frac{C}{2}$ rezultă

$II_a \le II_b \le II_c$. Ținând cont de proprietatea 3, obținem $EA \ge EB \ge EC$ și folosind pentru aceste numere inegalitatea lui Cebâșev, rezultă:

$$\sum II_a \cdot EA \le \frac{\sum II_a \cdot \sum EA}{3} \le \frac{6R \cdot 3R}{3} = 6R^2$$

2. În orice ΔABC are loc $\sum OI_a \le 3R$

Demonstrație. Este o consecință imediată a relației $\sum EA \le 3R$, ținând cont de faptul că cercul circumscris ΔABC este cercul lui Euler al $\Delta I_a I_b I_c$.

Bibliografie

1. Nicula V., Numere complexe, probleme şi exerciţii pentru clasa a X-a, Editura Scorpion, Bucureşti, 1995

2. Dincă M., Chiriţă M., Numere complexe în matematica de liceu, Editura ALL Educaţional, Bucureşti, 1995

ON A CONTEST PROBLEM

Abstract. Using the complex numbers, we shall find some new relations between the vertices and the following remarkable points of a triangle: the orthocentre H; the centroid G; the centers of the exscribed circles I_a, I_b, I_c ; the incenter *I*, the circumcenter O; the center of the Euler circle E.

Also we will give interesting proofs for some well-known results.

In this note R is the circumradius and a,b,c are the affixes of the vertices of the triangle ABC, with the origin in the circumcenter O.

Primit: 30. 05. 1998

Colegiul "Gheorghe Şincai"
Baia Mare