Lucrările Seminarului de
CREATIVITATE MATEMATICĂ
Vol. 8(1998-1999), 103-108

O METODĂ PENTRU CALCULUL VITEZEI DE CONVERGENȚĂ FOLOSIND TEOREMA DE DERIVARE A FUNCȚIEI INVERSE

Cristinel MORTICI

Fie date o funcție $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ și un șir de numere reale $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ne propunem să studiem proprietățile unui șir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dat de recurența

$$f(x_n)=a_n,\quad n\in\mathbb{N},\ x_0\in\mathbb{R}.$$

Rezultatele teoretice următoare constituie modalitatea de a calcula limita șirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ și apoi viteza de convergență a șirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ către limita sa.

De menționat că în numeroase cazuri, expresia șirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nu poate fi determinată explicit, nici măcar atunci când funcția f este inversabilă, ca cea din aplicațiile pe care le vom prezenta în final.

Fie I, $J\subset\mathbb{R}$ două intervale.

Propoziția 1. Presupunem că sunt satisfăcute următoarele condiții:

(a) funcția $f:I\to J$ este continuă și bijectivă;

(b) șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent la $a\in\mathbb{R}$.

Atunci șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent.

Demonstrație. Relația de recurență se scrie $x_n=f^{-1}(a_n)$ și avem

$$\lim_{n\to\infty} f^{-1}(a_n)=f^{-1}(a),$$

deoarece, conform teoremei de continuitate a funcției inverse, rezultă că funcția f^{-1} este continuă.

Propoziția 2. Presupunem că sunt satisfăcute (a)-(b) și în plus, f este derivabilă, cu f' continuă și nenulă. Atunci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n - l}{a_n - a} = \frac{1}{f'(l)},$$

unde $l = \lim_{n\to\infty} x_n$.

Demonstrație. Așa cum am văzut $l = f^{-1}(a)$. Atunci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n - l}{a_n - a} = \lim_{n\to\infty} \frac{f^{-1}(a_n) - f^{-1}(a)}{a_n - a} = \lim_{x\to a} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(a)}{x - a} = (f^{-1})'(a) .$$

Cu teorema de derivare a funcției inverse, avem

$$(f^{-1})'(a) = \frac{1}{f'(f^{-1}(a))} = \frac{1}{f'(l)},$$

deci concluzia.

Aplicații. **(A_1)** În [1], pag.33 este dată următoarea problemă:
Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir de numere astfel încât

$$x_n + \ln x_n = 1 + \frac{1}{n}, \quad \forall\ n \ge 1 .$$

Să se arate că: (a) $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$; (b) $\lim_{n\to\infty} n(x_n - 1) = \frac{1}{2}$

Soluție. Fie $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = x + \ln x$. Avem $f'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0$, deci f este strict crescătoare.
Cum f este continuă și $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, rezultă că f este surjectivă.
Așadar, f este bijectivă. Relația de recurență se scrie

$$f(x_n) = 1 + \frac{1}{4} \Rightarrow x_n = f^{-1}\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Avem

$$\lim_{n \to \infty} f^{-1}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = f^{-1}(1) = 1 .$$

Apoi

$$\lim_{n \to \infty} n\,(x_n - 1) = \lim_{n \to \infty} \frac{f^{-1}\left(1 + \frac{1}{n}\right) - f^{-1}(1)}{\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1} = (f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{2} .$$

(A_3) Fie şirul $(x_n)_{n \geq 1}$, $x_1 > 1$ dat de relaţia

$$2^{x_n} - x_n = n\left(\sqrt[n]{e} - 1\right), \quad n \geq 2$$

Să se arate că: (a) $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 1$; (b) $\lim\limits_{n \to \infty} n\,(x_n - 1) = \dfrac{1}{2\,(\ln 4 - 1)}$.

Demonstraţie. Funcţia $f : (1, \infty) \to A$, $f(x) = 2^x - x$, $A = Im\, f$, satisface condiţiile propoziţiilor 1-2. Ea este derivabilă şi

$$f'(x) = 2^x \ln 2 - 1 > 0 , \quad \forall\, x \in (1, \infty) .$$

Avem

$$f(x_n) = n\left(\sqrt[n]{e} - 1\right) \Rightarrow x_n = f^{-1}\left(n\left(\sqrt[n]{e} - 1\right)\right)$$

Cum

$$\lim_{n \to \infty} n\left(\sqrt[n]{e} - 1\right) = \lim_{n \to \infty} \frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = 1 ,$$

rezultă că

$$\lim_{n \to \infty} x_n = f^{-1}(1) = 1 .$$

Apoi

$$\lim_{n\to\infty} n\,(x_n - 1) = \lim_{n\to\infty} n \cdot \frac{f^{-1}\left(n\left(\sqrt[n]{e}-1\right)\right) - f^{-1}(1)}{n\left(\sqrt[n]{e}-1\right)-1} \cdot \left[n\left(\sqrt[n]{e}-1\right) - 1\right] =$$

$$= \frac{1}{\ln 4 - 1} \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\ln 4 - 1} \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{e^{x}-1}{x} - 1}{x} = \frac{1}{2(\ln 4 - 1)}\,.$$

(A$_3$) Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (0,1)$ astfel încât

$$tg\, x_n + \cos x_n = \sqrt[n]{n}\,, \quad n \geq 2\,.$$

Să se arate că: (a) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$; (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n x_n}{\ln n} = 1$

Demonstrație. Fie $f : [0,1] \to [1,\alpha]$, $f(x) = tg\, x + \cos x$, unde $\alpha = tg\, 1 + \cos 1$. Funcția f este derivabilă și

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - \sin x > 0\,, \quad \forall\, x \in [0,1]\,,$$

deci f este strict crescătoare.
Avem

$$f(x_n) = \sqrt[n]{n} \Rightarrow x_n = f^{-1}\left(\sqrt[n]{n}\right),$$

deci

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} f^{-1}\left(\sqrt[n]{n}\right) = f^{-1}(1) = 0\,.$$

Apoi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n x_n}{\ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n} - 1}{\ln \sqrt[n]{n}} \cdot \frac{x_n}{\sqrt[n]{n} - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{\ } - 1}{\ln \sqrt[n]{n}} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{f^{-1}\left(\sqrt[n]{n}\right) - f^{-1}(1)}{\sqrt[n]{n} - 1} =$$

$$= (f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(0)} = 1 .$$

(A$_4$) Fie $(x_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}$ astfel încât

$$\frac{1}{x_n} + \operatorname{arc}tg\, x_n = n , \quad \forall\, n \geq 1 .$$

Să se arate că: (a) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$; (b) $\lim\limits_{n\to\infty} n x_n = 1$.

Soluție. Relația dată se scrie echivalent

$$\frac{x_n}{1 + x_n \operatorname{arc}tg\, x_n} = \frac{1}{n} , \quad n \geq 1$$

Fie $f : [0, \infty) \to \left[0 , \frac{2}{\pi}\right]$, $f(x) = \dfrac{x}{1 + x \operatorname{arc}tg\, x}$.

Avem

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} f^{-1}\left(\frac{1}{n}\right) = f^{-1}(0) = 0 .$$

Apoi

$$\lim_{n\to\infty} n\, x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{f^{-1}\left(\frac{1}{n}\right) - f^{-1}(0)}{\frac{1}{n} - 0} = (f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(0)} = 1 .$$

Bibliografie

[1] **C. Mortici**, Probleme pregătitoare pentru concursurile de matematică, Editura Gil, Zalău, 1999

[2] **C. Mortici**, Introducere în analiza matematică prin exerciţii şi probleme, Editura TEORA, Bucureşti (va apărea)

[3] **I. Colojoară, R. Miculescu, C. Mortici**, Probleme de analiză matematică, Editura ALL, Bucureşti (va apărea)

A METHOD TO COMPUTE THE ORDER OF CONVERGENCE BASED ON THE INVERSE FUNCTION DERIVATION THEOREM

Abstract. In this article we use the theorem of derivation of an inverse function to obtain the order of convergence of the sequence (x_n) defined by the relation

$f(x_n)=a_n,\ n\in\mathbb{N},\ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

Primit: 1. 08. 1999

Universitatea Ovidius
Facultatea de Matematică
Bd. Mamaia 124
8700 CONSTANŢA
E-mail: cmortici@univ-ovidius.ro