Lucrările Seminarului de
CREATIVITATE MATEMATICĂ
Vol. 8(1998-1999), 109-114

UN CRITERIU PENTRU DETERMINAREA UNOR LIMITE DE ŞIRURI

Gheorghe BOROICA, Nicolae MUŞUROIA

În acest articol vom da o metodă unitară pentru determinarea limitelor unor şiruri propuse la diferite concursuri.

Rezultatul de bază este:

Teoremă. *Fie* $D \subset \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ *un punct de acumulare pentru* D *şi* $(x_n^{(k)})_{n\geq 1}$ *un şir de elemente din* D *ai cărui termeni depind de un număr natural* k, $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. *Dacă pentru funcţiile* $f, g : D \to \mathbb{R}$ *şi pentru şirurile* $(x_n^{(k)})_{n\geq 1}$ *avem:*

1. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^{(k)} = \alpha$;

2. $x_n^{(k)} > x_n^{(k+1)} > \alpha$, $(\forall) k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ *sau* $\alpha \leq x_n^{(k)} \leq x_n^{(k+1)}$, $(\forall) k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$;

3. $g(x) > 0$, $(\forall) x \in D$, $x > \alpha$;

4. $(\exists) \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} g(x_n^{(k)}) = g_0 \in \mathbb{R}^*$;

5. $(\exists) \lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l \in \mathbb{R}$,

atunci există $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f(x_n^{(k)}) = g_0\cdot l$

Demonstrație. Pentru început presupunem că

$x_n^{(1)} \geq x_n^{(2)} \geq \ldots \geq x_n^{(n)}, (\forall)n\in\mathbb{N}^*$. Deoarece $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{f(x)}{g(x)} = l\in\mathbb{R}$, pentru orice

$\varepsilon > 0, (\exists)\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât $(\forall)x\in D$ cu $|x-\alpha| < \delta$ avem:

$$l-\varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < l+\varepsilon \qquad (*)$$

Cum $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^{(1)} = \alpha$, $(\exists)n_\delta\in\mathbb{N}$ astfel încât: $|x_n^{(1)}-\alpha| < \delta, (\forall)\, n\geq n_\delta$.

Folosind ipoteza obținem: $\left|x_n^{(k)}-\alpha\right| \leq \left|x_n^{(1)}-\alpha\right| < \delta, (\forall)\, n\geq n_\alpha$ și $(\forall)k\in\{1,2,\ldots,n\}$

Utilizând relația (*) obținem:

$$(l-\varepsilon)\cdot g(x_n^{(k)}) \leq f(x_n^{(k)}) \leq (l+\varepsilon)\cdot g(x_n^{(k)}),\ k\in\{1,2,\ldots,n\},\ n\geq n_\delta$$

Însumând, rezultă: $l-\varepsilon \leq \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} f(x_n^{(k)})}{\sum\limits_{k=1}^{n} g(x_n^{(k)})} \leq l+\varepsilon$, de unde $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} f(x_n^{(k)})}{\sum\limits_{k=1}^{n} g(x_n^{(k)})} = l$.

Folosind relația 4. se deduce că $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f(x_n^{(k)}) = l\cdot g_0$.

Cazul în care $x_n^{(k)}$ este crescător în k, adică $x_n^{(1)} \leq x_n^{(2)} \leq \ldots \leq x_n^{(n)}$, se tratează analog.

Aplicații. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, unde:

1) $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} tg\left(\frac{2k}{n^2}\right)$;

2) $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$;

3) $a_n = \sum_{k=1}^{n} \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}\right)$;

4) $a_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k^p}{n^{p+1}}\right), p \in \mathbb{N}^*$;

5) $a_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}\right)$;

6) $a_n = \sum_{k=1}^{n} 2^{\frac{1}{n+k}} - n$;

(D. Andrica, Concursul Național de Matematică "Avram Iancu" 1996)

7) $a_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\sqrt{1 + \frac{k}{n^2}} - 1\right)$;

8) $a_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\sqrt[p]{1 + \frac{k}{n^2}} - 1\right), p \in \mathbb{N}, p \geq 2$;

9) $a_n = -n + \sum_{k=1}^{n} e^{\frac{k}{n^2}}$;

(Tiberiu Agnola, Tabăra Națională de Matematică, Câmpulung Moldovenesc, 1993)

10) $a_n = \sum_{i=1}^{n} \sin\left(\frac{(2i-1)a}{n^2}\right), a > 0$;

11) $a_n = \sum_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{n+k}\right)^r - n, r \in \mathbb{R}$;

12) $a_n = \sum_{k=1}^{n} a^{\frac{1}{n} \cdot f\left(\frac{k}{n}\right)} - n$, unde $f:[0,1] \to \mathbb{R}_+^*$ este o funcție integrabilă și $a>0$ un

număr real fixat.

(D. Andrica, Concursul Interjudețean " Grigore Moisil", SatuMare,1997)

13) $a_n = \sum_{k=1}^{n \cdot p} \left(1 + \frac{1}{n+k}\right)^r - n,\ p \in \mathbb{N}^*$;

14) $a_n = \sum_{k=1}^{n \cdot p} \left[\left(a + \frac{1}{n+k}\right)^{\frac{1}{n+k}+a} - a^a\right]$, unde $p \in \mathbb{N}^*$ și a>0 fixat.

Demonstrăm pentru exemplificare problema 14).

Se știe că $\lim_{x \to a} \frac{x^x - a^a}{x - a} = a^a \cdot (\ln a + 1)$

Considerăm funcțiile $f, g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^x - a^a$, $g(x) = x - a$ pentru orice $x \in (0, \infty)$. Fie șirul $\left(x_n^{(k)}\right)_{n \geq 1}$ definit de formula

$$x_n^{(k)} = \frac{1}{n+k} + a,\ (\forall)\, n \in \mathbb{N}^*,\ \text{unde}\ \ k \in \{1, 2, \ldots, n\}\ .$$

Avem:1) $\lim_{n \to \infty} x^{(k)} = a \in \mathbb{R}$;

2) $x_n^{(1)} \geq x_n^{(2)} \geq x_n^{(3)} \geq \ldots \geq x_n^{(n)} > a$;

3) $g(x) > 0,\ (\forall)\, x > a$;

4) $\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n \cdot p} g(x_n^{(k)}) = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n + p \cdot n}\right) = \ln(p+1) \in \mathbb{R}^*$;

5) $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = a^a \cdot (\ln a + 1)$

Condițiile din teoremă fiind îndeplinite, obținem

$\lim_{n \to \infty} a_n = a^a \cdot (\ln a + 1) \cdot \ln(p+1)$.

Observații. Limitele șirurilor propuse sunt:

1) 1; 2) $\frac{1}{2}$; 3)1; 4) $\sqrt[p+1]{e}$;

5) e; 6) $(ln2)^2$; 7) $\frac{1}{4}$; 8) $\frac{1}{2p}$;

9) $\frac{1}{2}$; 10) a; 11) $rln2$;

12) $\int_0^1 f(x)\,dx \cdot \ln a$; 13) $r \cdot \ln(p+1)$;

14) $a^a(lna+1)\cdot\ln(p+1)$.

Bibliografie

1. **D. Andrica şi colaboratorii,** Concursul Interjudeţean de Matematică "Grigore Moisil", Casa Corpului Didactic, Satu Mare, 1998
2. **Aramă Lia şi colaboratorii,** Culegere de probleme de analiză matematică, Editura Universal Pan, Bucureşti, 1996
3. **Revista de Matematică din Timişoara,** 2/1997 , Editura Bîrchi

A UNITARY CRITERIA TO COMPUTE THE LIMITS OF SOME SEQUENCES

Abstract. In this article we give a unitary method to compute the limits of some sequences.

Primit: 30.05.1998

Colegiul "Gheoghe Şincai"
Baia Mare
ROMANIA