Lucrările Seminarului de CREATIVITATE MATEMATICĂ
Vol. 8(1998-1999), 115-134

METODA APROXIMAȚIILOR SUCCESIVE ÎN MATEMATICA ELEMENTARĂ

Vasile POP, Tiberiu OPROIU

1. Introducere.

Metoda aproximațiilor succesive este una din metodele generale ale matematicii. Un mare număr de probleme practice conduc la ecuații (sau sisteme de ecuații) algebrice, diferențiale integrale sau ecuații de natură mai complicată. Metoda aproximațiilor succesive este una din cele mai eficiente metode utilizate pentru aproximarea soluțiilor acetor ecuații sau sisteme de ecuații.

Generalitatea metodei, precum și faptul că ea poate fi programată ușor la calculator pledează pentru înțelegerea ei profundă încă din clasele liceale.

Scopul articolului este de a prezenta cât mai simplu metoda aproximațiilor succesive folosind exemple elementare care presupun cunoștințe ce pot fi însușite de elevii din ciclul liceal.

Conținutul articolului poate constitui un punct de pornire în elaborarea unor lucrări pentru obținerea gradului I.

2. Originile istorice ale metodei.

Prima menționare a aproximațiilor succesive se găsește în paradoxul lui Zenon (aprox. 500 î.e.n.) prin care încerca demonstrarea faptului că alergătorul Achile nu poate ajunge o broască țestoasă .

Raționamentul lui Zenon este următorul. Dacă presupunem că distanța dintre Achile și broasca țestoasă este de 1000 pași, că într-o secundă Achile parcurge 10 pași iar broasca 1 pas, atunci în 100 secunde Achile parcurge cei 1000 de pași care-l separa de broasca.

În acest timp broasca țestoasă va parcurge 100 pași. În 10 secunde Achile va parcurge cei 100 de pași dar broasca va parcurge alți 10 pași. Pentru acoperirea acestei distanțe Achile are nevoie de încă o secundă timp în care broasca va parcurge încă un pas. Prin urmare, broasca țestoasă va fi tot timpul în fața lui Achile.

Dacă se notează cu x timpul după care Achile ajunge broasca țestoasă atunci problema este modelată matematic de ecuația:

$$10x - x = 1000, \tag{1}$$

a cărei soluție este $x = 111\frac{1}{9}$ secunde.

Raționamentul lui Zenon urmează o metodă de aproximare a soluției ecuației (1) care poate fi scrisă sub forma:

$$x = 100 + \frac{x}{10}. \tag{2}$$

Neglijînd termenul x/10 (mic în comparație cu x) se obține prima aproximație $x_1 = 100$ pentru ecuația (2). Substituind pe x din partea dreaptă a ecuației (2) cu x_1 se obține aproximația a doua a soluției:

$$x_2 = 100 + \frac{100}{10} = 110.$$

Analog, avem:

$$x_3 = 100 + \frac{110}{10} = 111,$$

și în general

$$x_{n+1} = 100 + \frac{x_n}{10}. \tag{3}$$

Şirul $x_1 = 100$, $x_2 = 110$, $x_3 = 111$, ..., rezultat din raţionamentul lui Zenon, este şirul aproximaţiilor succesive pentru soluţia exactă a ecuaţiei (1).

O altă sursă istorică legată de metoda analizată se referă la modul cum se făcea extragerea rădăcinii pătrate în Babilonul antic. Metoda este utilizată şi în prezent de către calculatoarele electronice.

În limbajul actual, dacă $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$ şi dacă x_n este o valoare aproximativă pentru $\sqrt{a}$ atunci aproximaţiile următoare se calculează cu formula:

$$x_{n+1} = \frac{a + x_n^2}{2x_n}. \tag{4}$$

Metoda de aproximare a rădăcinii pătrate dată de (4) constă în substituirea, la fiecare pas, a mediei geometrice a numerelor x_n şi a/x_n cu media lor aritmetică (care este o aproximare prin adaus).

Într-adevăr, dacă presupunem că am găsit cumva aproximaţia x_n pentru $\sqrt{a}$ atunci $\sqrt{a} = \sqrt{x_n \cdot \frac{a}{x_n}}$, cea ce exprimă faptul că $\sqrt{a}$ este media geometrică a numerelor x_n şi a/x_n.

Aproximând această medie geometrică cu media aritmetică a acelor numere se obţine:

$$x_{n+1} = \frac{x_n + \frac{a}{x_n}}{2} = \frac{a + x_n^2}{2x_n},$$

care este tocmai formula (4).

Se consideră numai valoarea pozitivă a lui x_n. Notând cu $\varepsilon_n = \sqrt{a} - x_n$ eroarea aproximaţiei x_n atunci:

$$\varepsilon_{n+1} = \sqrt{a} - x_{n+1} = \sqrt{a} - \frac{a + x_n^2}{2x_n} =$$

$$= -\frac{a - 2x_n\sqrt{a} + x_n^2}{2x_n} =$$

$$= -\frac{(\sqrt{a} - x_n)^2}{2x_n} = -\frac{\varepsilon_n^2}{2x_n},$$

care exprimă faptul că toate aproximațiile x_n, începând cu a doua, sunt aproximații prin adaus.

Din

$$|\varepsilon_{n+1}| = |-\frac{\varepsilon_n}{2x_n}||\varepsilon_n| =$$

$$= |\frac{x_n - \sqrt{a}}{2x_n}||\varepsilon_n| < \frac{1}{2}|\varepsilon_n|,$$

rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} |\sqrt{a} - x_{n+1}| = \lim_{n\to\infty} |\varepsilon_{n+1}| = 0,$$

ceea ce reprezintă faptul că șirul generat de (4) este totdeuna convergent și tinde la $\sqrt{a}$.

Procesul de aproximare se continuă până când numerele x_n și x_{n+1} coincid în limita preciziei cerute.

Menționăm faptul că o greșeală făcută într-o fază a calculului de extragere a rădăcinii pătrate prin metoda obișnuită conduce la invalidarea calculelor ulterioare și la un rezultat greșit în timp ce metoda aproximațiilor succesive, descrisă mai sus, nu prezintă acest neajuns.

3. Contracții.

Se consieră funcția $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$. Dacă φ este continuă pe $[a, b]$ atunci imaginea prin φ a intervalului $[a, b]$ este tot un interval.

Dacă φ transformă intervalul $[a, b]$ într-un subinterval $[a_1, b_1] \subset [a, b]$, atunci orice subinterval al lui $[a, b]$ se va transforma prin φ într-un subinterval al lui $[a_1, b_1]$. În particular $[a_1, b_1]$ este transformat de φ în $[a_2, b_2]$ unde $[a_2, b_2] \subset [a_1, b_1]$, etc.

Exemplu.

$$\varphi : [0, 4] \to \mathbb{R}, \quad \varphi = \frac{x+1}{x+2},$$

transformă intervalul [0, 4] în subintervalul $[\frac{1}{2}, \frac{5}{6}]$ și pe acesta în $[\frac{3}{5}, \frac{11}{17}]$, etc.

Definiţia 1. Se spune că o funcţie $\varphi:[a,b]\to\mathbb{R}$ este o contracţie pe intervalul $[a,b]$ dacă există un număr $q\in\mathbb{R}$, $0<q<1$, astfel încât pentru orice două puncte $x_1,x_2\in[a,b]$ sa fie satisfăcută inegalitatea

$$|\varphi(x_2)-\varphi(x_1)|\le q\,|x_2-x_1|. \tag{5}$$

Inegalitatea (5) semnifică faptul că funcţia φ micşorează distanţa dintre oricare ouă puncte ale intervalului $[a,b]$. Aceasta înseamnă că φ transformă intervalul $[a,b]$ într-un subinterval al său $[a_1,b_1]\subset[a,b]$. Orice subinterval al lui $[a,b]$ se va transforma prin φ într-un subinterval al lui $[a_1,b_1]$. În particular $[a_1,b_1]$ este transformat de φ in $[a_2,b_2]\subset[a_1,b_1]$ etc. În acest mod se obţine şirul de intervale:

$$[a,b],\ [a_1,b_1],\ \dots\ ,[a_n,b_n],\ \dots \tag{6}$$

în care fiecare este subinterval al intevalului preceent şi $[a_n,b_n]$ este imaginea prin φ a lui $[a_{n-1},b_{n-1}]$, $n=1,2,\dots$

Exemplu: $\varphi:[0,4]\to\mathbb{R}$, $\varphi(x)=\dfrac{x+1}{x+2}$.

Proprietatea 1. Dacă $\varphi:[a,b]\to[a_1,b_1]$ este o contracţie atunci şirul de intervale (6), obţinut din **[a, b]** prin aplicarea succesivă a lui φ, tinde la un punct $\xi\in[a,b]$.

Demonstraţie. Funcţia φ fiind contracţie pentru orice n, avem:

$|b_1-a_1|\le q\,|b-a|$,

$|b_2-a_2|\le q\,|b_1-a_1|\le q^2|b-a|$,

$|b_3-a_3|\le q\,|b_2-a_2|\le q^3|b-a|$,

....

$|b_n-a_n|\le q^n|b-a|$.

Deoarece $0<q<1$ rezultă că

$$\lim_{n\to\infty}|b_n-a_n|\le\lim_{n\to\infty}q^n\,|b-a|=0.$$

Ca urmare, şirul de intervale (6) se contractă la un punct din intervalul $[a,b]$.

Dacă inegalitatea (5) este satisfăcută pentru $\forall\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ atunci funcția φ este o contracție pe toată axa reală.

Proprietatea 2. Dacă φ este o contracție pe toată axa reală atunci există un interval în $\mathbb{R}$ care se contractă prin φ la un punct ξ din acel interval.

Demonstrație. Fie $a \in \mathbb{R}$ un număr arbitrar și $b = \varphi(a)$. Se alege numărul $q_1 < 1$ astfel încât $q < q_1$ și se notează $T = |b-a|/(1-q_1)$. Pentru orice $x \in [a-T, a+T]$ este adevărată inegalitatea și atunci

$$|\varphi(x) - b| = |\varphi(x) - \varphi(a)| \le q|x-a| \le qT,$$

$$|\varphi(x) - a| = |\varphi(x) - b + b - a| \le$$

$$\le |\varphi(x) - b| + |b-a| \le$$

$$\le qT + (1-q_1)T = (1+q-q_1)T < T,$$

ceea ce demonstrează faptul că funcția φ transformă intervalul $[a-T, a+T]$ într-un subinterval al său.

4. Metoda aproximațiilor succesive.

Se consideră ecuația $f(x) = 0$ despre care se presupune că poate fi scrisă sub forma:

$$x = \varphi(x), \quad f(x) + x = x \tag{7}$$

unde $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ este o funție continuă (pe domeniul său de definiție).

Dacă ζ este o soluție a ecuației (7) atunci

$$\zeta = \varphi(\zeta)$$

adică, ζ este punct fix pentru φ. Deci, problema rezolvării ecuației (7)este echivalentă cu problema găsirii punctelor fixe ale lui φ.

Esența metodei aproximațiilor succesive constă în alegerea unei aproximații inițiale $x_1 \in [a, b]$ pentru soluția ζ și calcularea aproximației a doua x_2 cu formula:

$$x_2 = \varphi(x_1).$$

În general, dacă se cunoaște aproximația x_n, următoarea aproximație este dată de:

$$x_{n+1} = \varphi(x_n) \tag{8}$$

Se obține șirul aproximațiilor succesive

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \tag{9}$$

pentru soluția ζ a ecuației (7).

Propoziția 3. Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \zeta$ atunci ζ este o soluție a ecuației $x = \varphi(x)$.

Demonstrație. Considerăm relația $x_{n+1} = \varphi(x_n)$. Funcția φ fiind continuă rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \varphi(x_n)$$

sau

$$\zeta = \varphi(\zeta)$$

adică, ζ este soluție a ecuației (7).

Convergența șirului (9) este asigurată de următoarea propoziție.

Propoziția 4. Dacă φ este o contracție pe $[a,b]$ atunci, în acest interval, există o soluție unică pentru ecuația $x = \varphi(x)$.

Demonstrație. Se consideră șirul de intervale

$$[a_1,b_1],\ [a_2,b_2],\ \ldots\ ,[a_n,b_n],\ \ldots$$

obținut din $[a,b]$ prin aplicarea succesivă a lui φ. Deoarece φ este o contracție pe $[a,b]$, conform propoziției 1, există un punct unic ζ comun tuturor intervalelor $[a_n,b_n]$, $n \in \mathbb{N}$. Imaginea lui ζ care este $\varphi(\zeta)$ trebuie să aparțină la toate aceste intervale. Singurul punct care aparține la toate intervalele $[a_n,b_n]$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$ este ζ. Deci $\varphi)\zeta) = \zeta$, adică ζ este punct fix al lui φ (soluție a ecuației (7)). Presupunem că ar mai exista un punct fix η al lui φ, adică $\eta = \varphi(\eta)$. Dar

$$|\eta - \zeta| = |\varphi(\eta) - \varphi(\zeta)| \le q\,|\eta - \zeta|,$$

care, având în vedere că $0 < q < 1$,, poate avea loc numai dacă $|\eta - \zeta| = 0$ de unde rezultă că $\eta = \zeta$.

Aceasta înseamnă că pentru $\forall\ x_0 \in [a,b]$ șirul generat de $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$ converge către o rădăcină a ecuației $x = \varphi(x)$, rădăcină situată în $[a,b]$. Prin urmare, orice punct $x_0 \in [a,b]$ poate fi luat ca aproximație inițială.

Se poate da și un alt criteriu pentru convergența metodei aproximațiilor succesive

Propoziţia 5. Dacă funcţia φ transformă intervalul $[a,b]$ într-un subinterval al său în care are loc inegalitatea $|\varphi'(x)| < q, \quad 0<q<1$, atunci pentru $\forall\ x_0 \in [a,b]$ şirul $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ generat de $x_n = \varphi(x_{n-1})$ converge către soluţia ecuaţiei $x = \varphi(x)$.

Demonstraţie. Fie $(x_1, x_2) \subset [a,b]$. Aplicând formula lui Lagrange se obţine:

$$\varphi(x_2) - \varphi(x_1) = \varphi'(c).(x_2 - x_1), \quad c \in (x_1, x_2)$$

sau

$$|\varphi(x_2) - \varphi(x_1)| \le q\,|x_2 - x_1|,$$

de unde rezultă că φ este o contracţie. Atunci, conform propoziţiei 4, şirul generat de $x_n = \varphi(x_{n-1})$ convere către soluţia ecuaţiei $x = \varphi(x)$.

Fie $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ şi $\zeta = \varphi(\zeta)$. Eroarea valorii aproximative x_{n+1} este:

$$\varepsilon_{n+1} = \zeta - x_{n+1} = \varphi(\zeta) - \varphi(x_n) =$$

$$= \varphi'(c_n)(\zeta - x_n) = \varphi'(c_n)\varepsilon_n,$$

unde $c_n \in (x_n, \zeta), \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$.

Propoziţia 6. Dacă ζ este rădăcina ecuaţiei $x = \varphi(x)$ din intervalul $[a,b]$ şi dacă în acest interval este satisfăcută inegalitatea $|\varphi'(x)| < q < 1$ atunci pentru $\forall\ n \in \mathbb{N}$ are loc relaţia:

$$|\varepsilon_{n+1}| < q^n |\varepsilon_1|, \tag{10}$$

aproximaţia iniţială x_1 fiind aleasă din intervalul $[a,b]$.

Demonstraţie.

Din $\varepsilon_{n+1} = \varphi'(c_n)\varepsilon_n$, pentru orice $\forall\ n \in \mathbb{N}$ rezultă:

$$|\varepsilon_2| = |\varphi'(c_1)|\,|\varepsilon_1|, \quad c_1 \in [a,b]$$

Deaorece $\varphi'(c_1) \le q$ avem:

$$|\varepsilon_2| < q\,|\varepsilon_1|,$$

şi analog:

$$|\varepsilon_3| = |\varepsilon'(c_2)|\,|\varepsilon_2| < q\,|\varepsilon_2| < q^2|\varepsilon_1|,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ,$$

$$|\varepsilon_{n+1}| < q^n|\varepsilon_1|,$$

care exprimă faptul că şirul aproximaţiilor succesive $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ aproximează soluţia ζ cu o eroare $|\varepsilon_{n+1}| = |\zeta - x_{n+1}|$ care descreşte cu creşterea lui n la fel de rapid ca şi progresia geometrică $q, q^2, \ldots, q^n, \ldots$.

Avantajul metodei aproximaţiilor succesive constă în simplitatea ei şi flexibilitatea alegerii formei funcţiei

φ. Dezavatajul constă în aceea că procesul iterativ nu este convergent la o alegere arbitrară a formei lui $\varphi(x)$. Convergenţa procesului de aproximare este asigurată numai dacă $|\varphi'(x)| < 1$ în vecinătatea soluţiei şi se accelerează în apropiere de ζ dacă $\varphi'(x) = 0$.

În Figura 1 ilustrăm modul cum φ' afectează convergenţa metodei iterative. Se observă că dacă $0 < \varphi' < 1$ convergenţa este asiptotică, dacă $-1 < \varphi < 0$ convergenţa este oscilatorie. În celelalte cazuri procedeul este divergent.

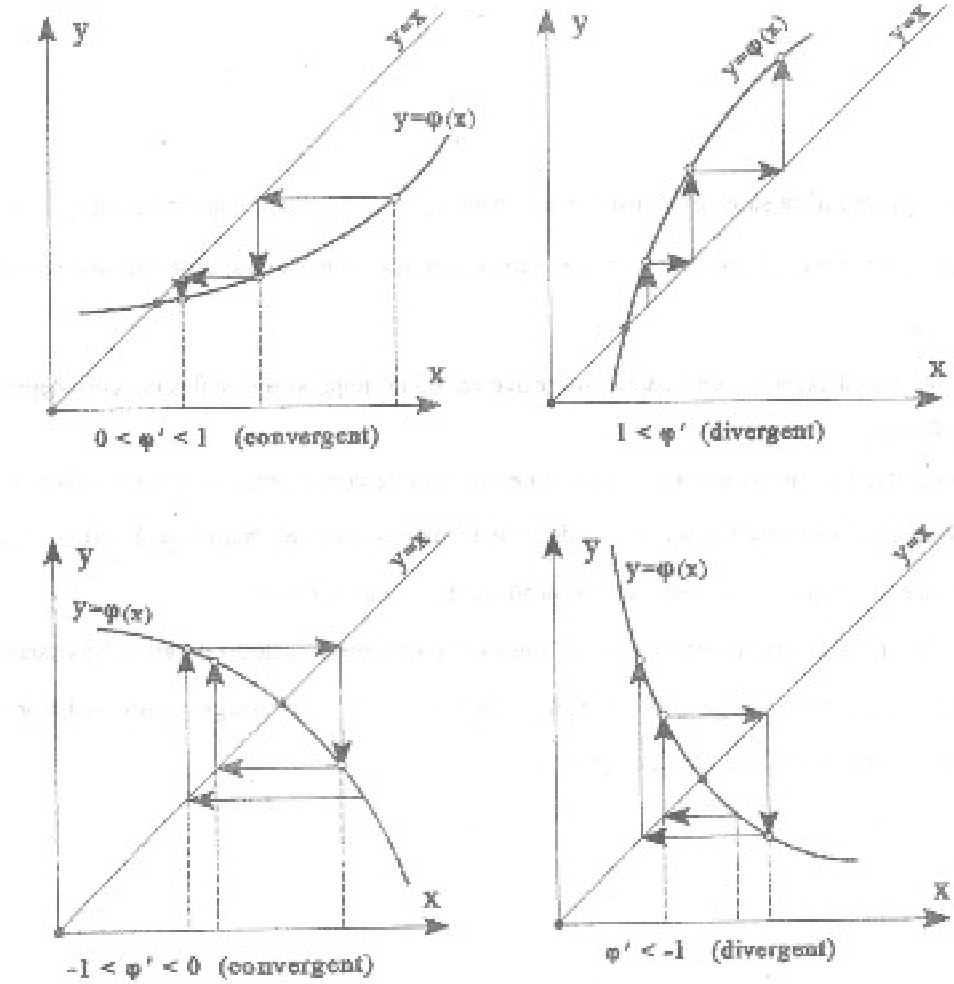

Figura 1
Convergenţa metodei aproximaţiilor succesive

Pentru a găsi o formă a lui φ convenabilă scriem

$$\varphi(x) = x - \alpha f(x),$$

pentru care schema iterativă devine:

$$x_n = x_{n-1} - \alpha f(x_{n-1}), \tag{11}$$

unde α este o constantă. Dacă procesul iterativ este convergent, valoarea lui x, care se obţine cu schema precedentă, satisface ecuaţia $f(x) = 0$. Constanta α se determină punând condiţia

$|\psi'(x)| < 1$ sau

$$-1 < 1 - \alpha f'(x) < 1,$$

de unde rezultă

$$0 < \alpha f'(x) < 2.$$

Aceasta indică faptul că α trebuie să aibă acelaşi semn ca şi f' şi că procesul (11) va converge totdeuna dacă α este aproape de zero. Rata optimă de convergenţă este atinsă atunci când $\alpha = 1/f'$.

Convergenţa procesului de aproximare se accelerează cu apropierea de ζ dacă $\psi'(\zeta) = 0$. Condiţia $|\psi'(x)| > 1$ conduce la divergenţa aproximaţiilor succesive.

5. Cazuri particulare ale metodei aproximaţiilor succesive

Dacă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ şi $f(a)f(b) < 0$ atunci ecuaţia $f(x) = 0$ are în $[a, b]$ cel puţin o rădăcină (o soluţie). Dacă, în plus, f este continuă şi monotonă pe $[a, b]$ atunci ecuaţia $f(x) = 0$ are o singură soluţie în $[a, b]$. Aproximaţiile succesive ale acestei soluţii se pot obţine prin metoda coardelor dată de

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - a}{f(x_n) - f(a)}. \qquad (12)$$

Se observă că dacă $f(a) \neq 0$ atunci ecuaţia $f(x) = 0$ este echivalentă cu ecuaţia

$$x = x - f(x)\frac{x - a}{f(x) - f(a)}, \qquad (13)$$

care este de forma

$$x = \psi(x), \qquad (14)$$

unde

$$\psi(x) = x - f(x)\frac{x - a}{f(x) - f(a)} = \frac{af(x) - xf(a)}{f(x) - f(a)}.$$

Pornind de la $x_0 = b$ şi aplicând metoda aproximaţiilor succesive ecuaţiei (14) se obţine acelaşi şir de aproximante ca şi cel dat de (12). Prin urmare, metoda coardelor este un caz particular al metodei aproximațiilor succesive.

Dacă ecuațiile $f(x)=0$ și $f'(x)=0$ nu au soluții comune atunci ecuația $f(x)=0$ este echivalentă cu ecuația:

$$x = x - \frac{f(x)}{f'(x)}. \tag{15}$$

Aplicând metoda aproximațiilor succesive ecuației (15) se obține șirul date de

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \tag{16}$$

care reprezintă tocmai metoda lui Newton pentru aproximarea soluțiilor ecuației algebrice $f(x)=0$.

Extragerea rădăcinii de ordinul $k \in \mathbb{N}^*$ dintr-un număr oarecare $a \in \mathbb{R}$, este echivalentă cu ecuația:

$$x^k - a = 0, \tag{17}$$

care se poate scrie sub forma:

$$x = \frac{a+(k-1)x^k}{kx^{k-1}}, \tag{18}$$

de unde aproximațiile succesive:

$$x_{n+1} = \frac{a+(k-1)x_n^k}{kx_n^{k-1}}, \tag{19}$$

pentru $\sqrt[k]{a}$.

Se observa că notând cu $f(x)=x^k-a$ avem $f'(x)=kx^{k-1}$ și aplicând metoda lui Newton pentru rezolvarae ecuație (17) se obține:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^k - a}{kx_n^{k-1}} = \frac{a+(k-1)x_n^k}{kx_n^{k-1}}.$$

Rezultă că formula (19) de calcul aproximativ al lui $\sqrt[k]{a}$ apare ca și caz particular al metodei lui Newton.

Pentru determinarea soluției ecuației:

$$f(x)=0,$$

se poate folosi un procedeu care constă în combinarea metodei coardei şi a metodei lui Newton, care sunt cazuri particulare ale metodei aproximaţiilor succesive.

Dacă graficul lui $y=f(x)$ este convex (Fig.2), atunci punctele a_1 şi x_1 se determină cu formulele:

$$a_1 = a - f(a)\frac{b-a}{f(b)-f(a)}, \tag{20}$$

$$x_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)}. \tag{21}$$

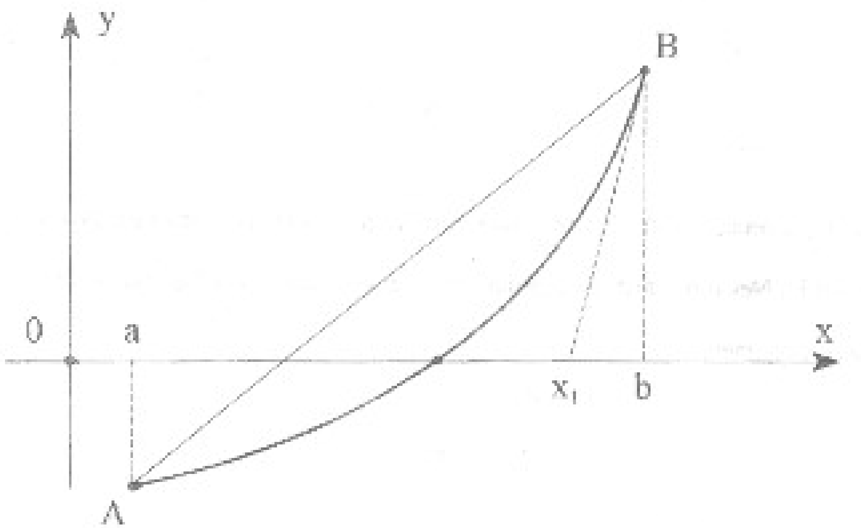

Figura 2.

Dacă graficul lui $y=f(x)$ este concav (Fig.3) atunci pentru calculul lui a_1 se foloseşte formula (20) iar pentru calculul lui x_1 formula:

$$x_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)} \tag{22}$$

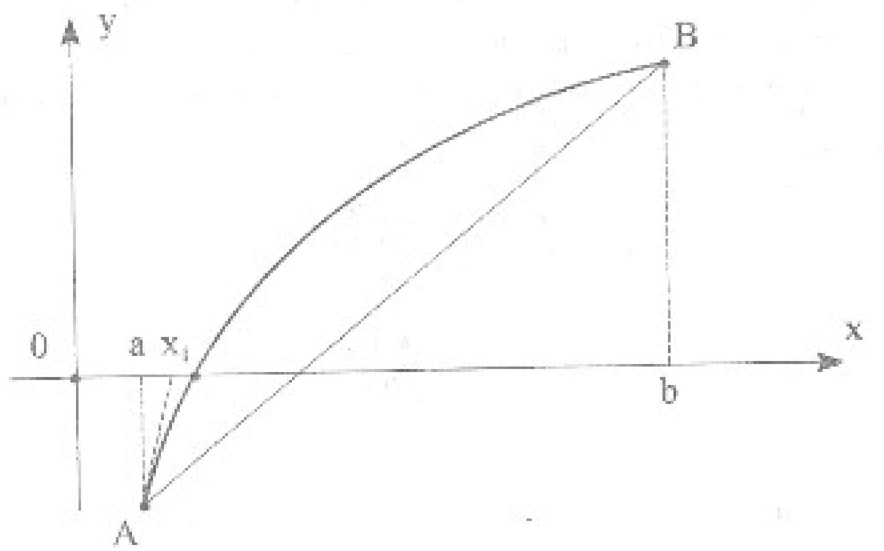

Figura 3.

Soluția ζ a ecuației $f(x)=0$ este situată între α_1 și x_1. Relativ la acest interval se aplică, din nou metoda lui Newton și metoda coardei obținându-se o nouă pereche α_2, x_2 etc.

Șirurile de numere:

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n, \ldots$$

$$x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots$$

aproximează soluția ζ din ambele părți.

Observație. Metoda expusă, poate fi extinsă la rezolvarea sistemelor de ecuații liniare.

6. Exemple

1). Să se găsească rădăcina de ordinul 3 din 155.

Soluție. Avem de calculat $\sqrt[3]{155}$. Aceasta problemă este echivalentă cu găsirea zeroului funcției:

$$f(x)=x^3-155,$$

sau rezolvarea ecuației $x^3 - 155 = 0$.

Aproximațiile succesive ale soluției acestei ecuații sunt date de (19) care, în cazul nostru, devine

$$x_{n+1} = \frac{155 + (3-1)x_n^3}{3x_n^{3-1}} =$$

$$= \frac{155 + 2x_n^3}{3x_n^2} =$$

$$= \frac{2}{3}x_n + \frac{155}{3x_n^2}.$$

Pornind cu valoarea inițială $x_0 = 5$, valorile numerice ale iterațiilor sunt:

n	x	
0	**5**	$x_0 = 5$
1	**5,4**	$x_1 = \frac{2}{3} \times 5 + \frac{155}{3 \times 25} = 5,4$
2	**5,371834**	$x_2 = \frac{2}{3} \times 5,4 + \frac{155}{3(5,4)^2} = 5,371834$
3	**5,371836**	$x_3 = \frac{2}{3} \times 5,371834 + \frac{155}{3 \times (5,371834)^2} = 5,371686$

Putem porni cu o valoare inițială estimată mai rău $x_0 = 10$. Se obține:

n	x	
0	10	$x_0 = 10$
1	**7,183334**	$x_1 = \frac{2}{3}x_0 + \frac{155}{3 \times x_0^2} = 7,183334$
2	**5,790176**	$x_2 = \frac{2}{3}x_1 + \frac{155}{3x_1^2} = 5,790176$
3	**5,401203**	$x_3 = \frac{2}{3}x_2 + \frac{155}{3x_2^2} = 5,4012036$

4 **5,371847** $x_4 = \frac{2}{3}x_3 + \frac{155}{3x_3^2} = 5{,}371847$

5 **5,371686** $x_5 = \frac{2}{3}x_4 + \frac{155}{3x_4^2} = 5{,}3716866$

În acest caz am ajuns la soluţie după un număr mai mare de iteraţii.

2). Se ştie că funcţia dată prin

$$f(x) = x^2 - 3x + e^x - 2,$$

are două soluţii, una negativă şi una pozitivă. Să se găsească cea mai mică dintre soluţii prin metoda aproximaţiilor succesive.

Soluţie. Se observă că pentru $x = 0$ avem $f(0) = -1$ iar pentru $x = -1$ avem $f(-1) = 2{,}367$. Deci, soluţia cea mai mică este în intervalul $[-1, 0]$. Scriind ecuaţia dată sub forma:

$$x = \varphi(x) = \frac{x^2 + e^x - 2}{3},$$

metoda iterativă este

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + e^{x_n} - 2}{3}$$

Condiţia ca $|\varphi'(x)| = |\frac{2x + e^x}{3}| < 1$ este satisfăcută pentru $x \in [-1, 0]$, aşa că metoda este convergentă. Valorile numerice ale iteraţiilor sunt:

n	x
0	**0** (valoare iniţială)
1	**-0,333333**
2	**-0,390786**
3	**-0,390254**
4	**-0,390272**
5	**-0,390272**

Ecuaţia dată se poate scrie şi sub forma

$$x = -\sqrt{3x - e^x + 2},$$

$$x = \sqrt{3x - e^x + 2},$$

care nu satisfac condiţia de convergenţă în vecinătatea soluţiei şi ca urmare nu pot fi considerate ecuaţii de lucru.

3). În mecanica cerească se arată că legea mişcării unei planete pe elipsă în jurul Soarelui este dată de ecuaţia lui Kepler:

$$E - e \sin E = M,$$

unde $0 < e < 1$ este excentricitatea elipsei, $M = n(t - \tau)$ este anomalia mijlocie, în care τ este momentul trecerii planetei prin periheliu (punctul de pe orbită cel ami apropiat de Soare), t este momentul când planeta se află într-un punct P pe orbita sa, $n = \frac{2\pi}{T}$ este viteza unghiulară medie iar T este perioada de revoluţie siderală a planetei. Necunoscuta este anomalia excentrică E.

Să se arate că ecuaţia lui Kepler are soluţie unică şi să se determine această soluţie cu ajutorul metodei aproximaţiilor succesive.

Soluţie. Considerăm cazul $M \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Atunci există k astfel încât:

$$k\pi < M < (k+1)\pi.$$

Funcţia definită prin $f(E) = E - e \sin E$ este monoton crescătoare pe $\mathbb{R}$ deoarece:

$$\frac{df}{dE} = 1 - e \cos E > 0.$$

Ca urmare funcţia f ia valoarea M cel mult pentru o singură valoare a lui E. Dar $f(k\pi) = k\pi < M$ şi $f((k+1)\pi) > M$, ceea ce înseamnă că funcţia f ia valoarea M cel puţin pentru o valoare a lui $E \in [k\pi, (k+1)\pi]$. Prin urmare, pentru o valoare dată $M \in [k\pi, (k+1)\pi]$ există un singur număr E pentru care $f(E) = M$, astfel încât $k\pi < E < (k+1)\pi$.

Deci, pentru orice pereche de numere e şi M $(0 < e < 1,\ -\infty < M < \infty)$ ecuaţia lui Kepler determină un singur număr E.

Pentru rezolvarea ecuaţiei lui Kepler, transcendentă în raport cu E, o scriem sub forma:

$$E = e \sin E + M.$$

Din faptul că $\varphi(E) = e \sin E + M$ este o contracţie ($|\varphi'(E)| = |e \cos E| < 1$) rezultă, conform propoziţiei 4, existenţa şi unicitatea soluţiei.

Aproximaţiile succesive se calculează cu ajutorul formulei:

$$E_{n+1} = e \sin E_n + M,$$

şi ne oprim cu iteraţiile atunci când $|E_{n+1} - E_n| < \varepsilon$, ε fiind eroarea cerută pentru soluţie.

4). Se poate aplica metoda aproximațiilor succesive la rezolvarea ecuației

$$x = x^3 - 2.$$

Soluție. Scriind ecuația sub forma $f(x) = x^3 - x - 2$, observăm că $f(1) = -2$, $f(2) = 4$, există o soluție în intervalul $[1,2]$. Dar $\psi(x) = x^3 - 2$ nu este contracție pe $[1,2]$.

Dacă scriem ecuația dată sub forma $x = \sqrt[3]{x+2}$, se constată că $\psi(x) = \sqrt[3]{x+2}$ este contracție pe $[1,2]$.

Într-adevăr,

$$|\psi(x_2) - \psi(x_1)| = |\sqrt[3]{x_2+2} - \sqrt[3]{x_1+2}| =$$

$$= \left|\frac{x_2 - x_1}{\sqrt[3]{(x_2+2)^2} + \sqrt[3]{(x_2+2)(x_1+2)} + \sqrt[3]{(x_1+2)^2}}\right| \le$$

$$\le \frac{1}{3\sqrt[3]{9}}|x_2 - x_1|$$

pe intervalul $[1,2]$.

Aproximațiile succesive se calculează cu formula $x_{n+1} = \sqrt[3]{x_n+2}$. Considrând valoarea de pronire $x_0=1$, valorile obținute sunt:

n	x
0	1 (valoare inițială)
1	1,442
2	1,510
3	1,520
4	1,521
5	1,521

Cu o precizie de 0.001, soluția ecuației date, din intervalul $[1,2]$ este $x = 1,521$.

5). Mărimea critică a unui reactor nuclear se determină rezolvând o ecuație critică a cărei versiune simplă este:

$tg(0.1\ x) = 9.2e^{-x}$, și despre care se știe că cea mai mică rădăcină pozitivă este în intervalul $[3,4]$. Să se determine această soltie.

Rezolvare. Vom folosi schema iterativă (*)

$$x_n = x_{n-1} - \alpha f(x_{n-1}),$$

unde $f(x) = tg(0,1\ x) - 9,2\ e^{-x}$. Se estimează o valoare aproximativă pentru f' în intervalul $[3,4]$ şi anume:

$$f' = \frac{f(4) - f(3)}{4 - 3} = 10,40299 .$$

Parametrul α este dată de $\alpha = \frac{1}{f'} = \frac{1}{0,40294} = 2,4814$ şi atunci:

$$x_n = x_{n-1} - 2,4814\ [tg(0,1\ x_{n-1}) - 9,2\ e^{-x_{n-1}}].$$

Se obţine:

n	x
0	4 (valoare iniţială)
1	**3,36899**
2	**3,28574**
3	**3,29384**
4	**3,28280**
5	**3,29293**
6	**3,29292**
7	**3,29292**

6). Folosind metoda combinată (a coardei şi metoda lui Newton) să se rezolve ecuaţia:

$$x - \sin x - 0,5 = 0 ,$$

obţinând soluţia cu precizia de 0,001.

Rezolvare. Întocmim un tabel cu valorile lui $f(x) = x - \sin x - 0,5$:

x	-1	0	1	2
f(x)	-0,659	-0,5	-0,341	0,591

Se observă că rădăcina ecuaţiei aparţine intervalului **(1,2)**.

Calculăm $f'(x) = 1 - \cos x$; $f''(x) = \sin x > 0$ pentru $x \in [1,2]$. Rezultă că vom alege $x_0 = 2$ şi conform (20) şi (21) avem:

$$x_1 = 2 - \frac{2 - \sin 2 - 0,5}{1 - \cos 2} = 1,583 ,$$

$$a_1 = 1 - (-0,341)\frac{2 - 1}{0,591 - (-0,341)} = 1,366 .$$

Pe intervalul $[a_1, x_1]$ avem:

$$x_2 = 1{,}583 - \frac{1{,}583 - 1{,}000 - 0{,}5}{1 - 0{,}012} = 1{,}501\,,$$

$$a_2 = 1{,}366 - 0{,}113 \frac{1{,}583 - 1{,}366}{0{,}083 - 0{,}113} = 1{,}491\,,$$

şi $x_3 = 1{,}498$; $a_3 = 1{,}498$ Deci, soluţia este $1{,}498 \pm 0{,}001$.

Bibliografie

BACHVALOV, N., Méthodes numériques, Ed. Mir, Moscou, 1976

BESKIN, N.M., Dividing a segment in a given ratio, Moscow, 1975

BRIŞCĂ,V., BUCUR,I., TUDOR,Gh., Calcul numeric, pentru anul III liceu, clase speciale de matematică, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1972.

DÉMIDOVITCH,B., MARON,I. Éléments de calcul numérique, Éditions Mir, Moscou,1979.

DIATCHENKO, V., Notion fondamentales du calcul numérique, Editions Mir, Moscou, 1975.

PĂVĂLOIU, I., Rezolvarea ecuaţiilor prin interpolare, Ed. Dacia, Cluj-Napoca, 1981

POSTOLACHE ,M., Metode numerice, Editura SIRIUS, Bucureşti, 1994

SACTER ,O., Elemente de Teoria ecuaţiilor algebrice şi transcendente, Editura Tehnică, Bucureşti, 1962.

VILENKIN,N.Ya., CHILOV,G., OUSPENSKI,V., LIOUBITCH,I., CHOR,L.Quelques applications des mathématiques, Editions Mir, Moscou, 1975.

VILENKIN,N.Ya., Method of Succesive Approximations, Mir Publishers, Moscow, 1979.

THE SUCCESIVE APPROXIMATION METHOD IN ELEMENTARY MATHEMATICS

Abstract. *The main purpose of this work is to expose in an elementary form the successive approximations method.The presentation of the method of iteration is based on the concept of the contraction mapping. Present paper is intended for schoolchildren, mathematics teachers and for those who encounter solutions of equations in their practical work.*

Primit: 30.10.1998

Universitatea "Babeş-Bolyai",
Facultatea de Matematică şi Informatică,
str.M. Kogălniceanu, nr.1, 3400 Cluj-Napoca,
E-mail: vpop@cs.ubbcluj.ro

Institutul Astronomic al Academiei Române,
Observatorul Astronomic Cluj-Napoca,
str.Cireşilor, nr.19, 3400 Cluj-Napoca